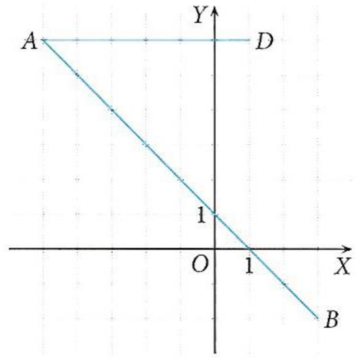
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} y=-1-ax \\ -x(a+2)(a-1)=a+2 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań dla $a=-2$: $\begin{cases} x\in\mathbf{R} \\ y=2x-1 \end{cases}$
	Sprawdzenie, że dla $a=1$ układ równań jest sprzeczny
	Rozwiązanie układu równań dla $a\neq-2$ i $a\neq1$: $x=\frac{-1}{a-1}$, $y=\frac{1}{a-1}$
	Przekształcenie nierówności $\lvert x-y\rvert\geqslant1$ do postaci: $\frac{2}{\lvert a-1\rvert}\geqslant1$
	Rozwiązanie nierówności $\frac{2}{\lvert a-1\rvert}\geqslant1$: $a\in\langle-1;1)\cup(1;3\rangle$
2.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} -a+3=2b \\ -1+3b=2-3a \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $a=-1$ i $b=2$
3.	Wyznaczenie współrzędnych punktów B i C: $B(-4,0)$, $C(5,0)$
	Obliczenie pola trójkąta ABC: $P=13\frac{1}{2}$
	Zapisanie równania szukanej prostej $y=ax+b$ w postaci: $ax-y-2a-\frac{5}{2}=0$
	Wyznaczenie odległości punktu $(2,4)$ od powyższej prostej: $d=\frac{13}{2\sqrt{a^2+1}}$
	Rozwiązanie równania $\frac{13}{2\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{13}$: $a=-\frac{3}{2}$, $a=\frac{3}{2}$
	Podanie odpowiedzi: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}$
4.	Przekształcenie układu równań: $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=mx+(2m+3) \end{cases}$ do postaci: $x^2+(mx+(2m+3))^2=9$
	Obliczenie wyróżnika równania kwadratowego $(m^2+1)x^2+2m(2m+3)x+4m^2+12m=0$ i stwierdzenie, że wyróżnik powinien być dodatni: $\Delta=4m(5m-12)>0$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{12}{5};\infty\right)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
	Zauważenie, że okrąg O_0 ma środek w punkcie $(3,1)$ i promień 1
	Zauważenie, że skoro okręgi O_1 i O_2 leżą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i są styczne do obu osi układu współrzędnych, to ich równanie jest postaci: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$, gdzie $r>0$
5.	Zapisanie warunku styczności okręgów: okręgi są styczne zewnętrznie, czyli odległość środków tych okręgów jest równa sumie ich promieni, zatem $\sqrt{(r-3)^2+(r-1)^2}=r+1$
	Przekształcenie równania do postaci: $r^2-10r+9=0$ i rozwiązanie go: $r_1=1$, $r_2=9$
	Zapisanie współrzędnych środków okręgów O_1 i O_2: $S_1(1,1)$, $S_2(9,9)$
	Obliczenie odległości między punktami S_1 i S_2: $8\sqrt{2}$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y-5x=2 \\ 4y+x=8 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(0,2)$
6. a)	Zapisanie współrzędnych punktów B i C w postaci: $B(a,5a+2)$, $C\left(b,-\frac{1}{4}b+2\right)$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a+b=7 \\ 5a+2-\frac{1}{4}b+2=-3 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktów B i C: $B(-1,-3)$, $C(8,0)$
	Zapisanie równania prostej k: $x-3y-8=0$
6. b)	Obliczenie odległości punktu A od prostej k: $d=\frac{7\sqrt{10}}{5}$
	Obliczenie długości odcinka BC: $\lvert BC\rvert=3\sqrt{10}$ i pola trójkąta ABC: $P=21$
	Obliczenie długości boków trójkąta ABC: $\lvert AB\rvert=\sqrt{17}$, $\lvert BC\rvert=2\sqrt{5}$, $\lvert AC\rvert=3\sqrt{5}$
	Wyznaczenie cosinusa kąta $\alpha=\lvert\sphericalangle ABC\rvert$ na podstawie twierdzenia cosinusów: $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{85}}{85}$
7.	Uzasadnienie, że skoro $\cos\alpha<0$, to trójkąt jest rozwartokątny
	Obliczenie $\sin\alpha$ z wykorzystaniem jedynki trygonometrycznej: $\sin\alpha=\frac{9\sqrt{85}}{85}$
	Skorzystanie z twierdzenia sinusów i obliczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R=\frac{\lvert AC\rvert}{2\sin\alpha}=\frac{5\sqrt{17}}{6}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8.	Obliczenie odległości między prostymi $y=2x+6$ i $y=2x-4$: $d=2\sqrt{5}$
	Zapisanie współrzędnych środka okręgu: $S(0,b)$ i obliczenie promienia okręgu: $r=\frac{d}{2}=\sqrt{5}$
	Obliczenie odległości środka okręgu S od prostych $y=2x+6$ i $y=2x-4$: $d_1=\frac{\lvert 6-b\rvert}{\sqrt{5}}$, $d_2=\frac{\lvert b+4\rvert}{\sqrt{5}}$
	Zapisanie równania: $\frac{\lvert 6-b\rvert}{\sqrt{5}}=\frac{\lvert b+4\rvert}{\sqrt{5}}$ i wyznaczenie parametru b: $b=1$
	Zapisanie równania okręgu: $x^2+(y-1)^2=5$
9.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+6x+y^2-4y-13=0 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(-2,-3)$ lub $A(2,1)$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(2,1)$ lub $B(-2,-3)$
	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $S(-3,2)$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C(-4,7)$ lub $C(-8,3)$
	Obliczenie długości boków AB i BC: $\lvert AB\rvert=4\sqrt{2}$, $\lvert BC\rvert=6\sqrt{2}$
	Zauważenie, że trójkąt ABC jest prostokątny, i obliczenie pola: $P=24$
10.	Zapisanie równania stycznej do okręgu w postaci: $\sqrt{3}x-y+b=0$
	Wyznaczenie odległości środka okręgu $S(4,0)$ od stycznej: $d=\frac{\lvert 4\sqrt{3}+b\rvert}{2}$
	Zapisanie równania: $\frac{\lvert 4\sqrt{3}+b\rvert}{2}=2\sqrt{3}$ i rozwiązanie go: $b=0$, $b=-8\sqrt{3}$
	Podanie odpowiedzi: $y=\sqrt{3}x$, $y=\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$
11.	Zapisanie równania okręgu w postaci: $(x+2)^2+(y-1)^2=34$
	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=-1$
	Wyznaczenie równania prostej DC: $y=-(x-3)+4$, czyli $y=-x+7$
	Wyznaczenie drugiego rozwiązania układu równań: $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=34 \\ y=-x+7 \end{cases}$ i podanie współrzędnych punktu B: $B(1,6)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. cd.	Narysowanie kąta BAD 
	Podanie miary kąta: $45°$
12.	Wyznaczenie prostej, na której leżą środki obu okręgów: $y = 2x - 4$
	Zauważenie, że równanie stycznej ma postać: $y = -\frac{1}{2}x + b$
	Zauważenie, że środek $S(6, 8)$ jest oddalony od stycznej o 10, oraz zapisanie równania: $\frac{\lvert \frac{1}{2}\cdot 6+8-b\rvert}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2}} = 10$
	Rozwiązanie równania: $b = 11 - 5\sqrt{5}$ lub $b = 11 + 5\sqrt{5}$
	Wybranie poprawnej odpowiedzi: $y = -\frac{1}{2}x + 11 - 5\sqrt{5}$
13.	Obliczenie współrzędnych punktu A: $A(-1, 2)$
	Obliczenie współrzędnych punktu B: $B(7, -4)$
	Wyznaczenie równania prostej AB: $3x + 4y - 5 = 0$
	Obliczenie odległości punktu C od prostej AB: $d = \frac{33}{5}$
	Obliczenie długości boku AB: $\lvert AB\rvert = 10$ i pola trójkąta ABC: $P = 33$
	Obliczenie długości boków BC i AC: $\lvert BC\rvert = 13$, $\lvert AC\rvert = 3\sqrt{5}$
	Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R = \frac{\lvert AB\rvert \cdot \lvert BC\rvert \cdot \lvert AC\rvert}{4P} = \frac{65\sqrt{5}}{22}$
14. a)	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i C: $A(1, -2)$, $C(3, 4)$
	Obliczenie współrzędnych punktu D: $D(-1, 7)$
	Obliczenie współrzędnych punktu B: $B(5, -5)$
	Wyznaczenie środków pozostałych boków: $S_{AB}(3, -\frac{7}{2})$, $S_{BC}(4, -\frac{1}{2})$, $S_{CD}(1, \frac{11}{2})$
14. b)	Wyznaczenie długości odcinków AB, BO i AO: $\lvert AB\rvert = 5$, $\lvert BO\rvert = 3\sqrt{5}$, $\lvert AO\rvert = \sqrt{10}$
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów: $\cos\lvert\sphericalangle AOB\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$, stąd $\lvert\sphericalangle AOB\rvert = 45°$
	Obliczenie pola równoległoboku: $P = 2\lvert AO\rvert \cdot \lvert BO\rvert \cdot \sin\lvert\sphericalangle AOB\rvert = 30$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
15.	Wyznaczenie równania prostej BC: $y=-2x+10$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y=-2x+10 \\ y=-x+4 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(6,-2)$
	Wyznaczenie równania prostej AC: $y=x+4$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y=x+4 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(-2,2)$
	Obliczenie obwodu trójkąta: $Obw=8\sqrt{5}+4\sqrt{2}$
16.	Wyznaczenie równania prostej AC: $y=-\frac{1}{2}x$
	Wyznaczenie współrzędnych środka $S(2,-1)$ odcinka AC jako punktu wspólnego prostych: $y=-\frac{1}{2}x$ i $y=2x-5$
	Obliczenie współrzędnych punktu A: $A(6,-3)$
	Wyznaczenie równania prostej AB: $y=-x+3$
	Zapisanie współrzędnych punktu B w postaci: $B(x,-x+3)$
	Obliczenie długości boków AC i BC: $\lvert AC\rvert=4\sqrt{5}$, $\lvert BC\rvert=\sqrt{(x+2)^2+(2-x)^2}$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu B z równania $(x+2)^2+(2-x)^2=80$: $B(-6,9)$
17. a)	Zapisanie równania okręgu w postaci: $(x-a)^2+y^2=r^2$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} (1-a)^2+16=r^2 \\ (-6-a)^2+9=r^2 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedzi: $(x+2)^2+y^2=5^2$
17. b)	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=\frac{1}{7}$
	Zapisanie równania prostej prostopadłej w postaci ogólnej: $-7x-y+b=0$
	Zapisanie równania: $\frac{\lvert b\rvert}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $y=-7x-10$, $y=-7x+10$
18.	Zapisanie środków i promieni okręgów: $S_1(16,0)$, $r_1=2$, $S_2(6,4)$, $r_2=4$
	Zauważenie, że skala jednokładności jest równa $-\frac{r_2}{r_1}=-2$
	Oznaczenie przez $P(x,y)$ środka jednokładności i zapisanie równania $\overrightarrow{PS_2}=-2\overrightarrow{PS_1}$ w postaci: $[6-x,4-y]=2[x-16,y]$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $P\left(12\frac{2}{3},1\frac{1}{3}\right)$