

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi
 – s. 199
 modele
 – s. 200

Zadanie 1. (6 pkt)

Dla jakiej wartości parametru a jedynym rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} ax + y + 1 = 0 \\ 2x + (a + 1)y - 1 = 0 \end{cases}$$

jest para liczb spełniająca nierówność $|x - y| \geq 1$?

Zadanie 2. (4 pkt)

Proste o równaniach $ax + y = 2b$ i $x + by = 2 - 3a$ przecinają się w punkcie $A(-1, 3)$. Oblicz pole trójkąta ABC , gdzie B i C są punktami przecięcia prostych z osią OX .

Zadanie 3. (4 pkt)

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(2, -\frac{5}{2})$, której odległość od punktu $(2, 4)$ jest równa $\sqrt{13}$.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m + 3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S(0, 0)$ i promieniu $r = 3$.

Zadanie 5. (6 pkt) CKE 2015

Dany jest okrąg O_0 o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$. W pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych istnieją dwa okręgi O_1, O_2 styczne zewnętrznie do okręgu O_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów O_1 oraz O_2 .

Zadanie 6. (6 pkt)

Proste $y - 5x = 2$ i $4y + x = 8$ przecinają się w punkcie A , a prosta k przecina te proste w punktach B i C . Punkt $S(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ jest środkiem odcinka BC . Oblicz:

- współrzędne punktów B i C ,
- odległość punktu A od prostej k i pole trójkąta ABC .

Zadanie 7. (5 pkt)

Uzasadnij, że trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 1)$, $B(-1, 5)$ i $C(-5, 7)$ jest rozwartokątny. Oblicz sinus kąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 8. (5 pkt)

Oblicz odległość między prostymi $y = 2x + 6$ i $y = 2x - 4$. Wyznacz równanie okręgu o środku leżącym na osi OY , stycznego do obu tych prostych.

Zadanie 9. (6 pkt)

Prosta $x - y = 1$ przecina okrąg $x^2 + 6x + y^2 - 4y - 13 = 0$ w punktach A i B . Oblicz pole trójkąta ABC oraz współrzędne punktu C , jeżeli AC jest średnicą tego okręgu.

Zadanie 10. (4 pkt)

Wyznacz równania stycznych do okręgu $(x - 4)^2 + y^2 = 12$ nachylonych do osi OX pod kątem 60° .

Zadanie 11. (6 pkt)

Na trapezie $ABCD$ o podstawie AB opisano okrąg o równaniu $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 29 = 0$. Wyznacz współrzędne punktu D , jeśli $A(-5, 6)$, $B(3, -2)$, $C(3, 4)$. Oblicz miarę kąta ostrego tego trapezu.

Zadanie 12. (5 pkt) CKE

Okrąg o środku $S(3, 2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Zadanie 13. (7 pkt)

Punkt $S(\frac{1}{2}, 5)$ jest środkiem odcinka AC , gdzie $C(2, 8)$. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień opisanego na nim okręgu, jeśli $\vec{AB} = [8, -6]$.

Zadanie 14. (7 pkt)

Punkt $O(2, 1)$ jest środkiem przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ oraz $\vec{AC} = [2, 6]$. Środek S boku AD ma współrzędne $S(0, \frac{5}{2})$. Wyznacz:

- a) współrzędne środków pozostałych boków równoległoboku,
- b) miarę kąta AOB i pole równoległoboku.

Zadanie 15. (5 pkt)

Dwie wysokości trójkąta ABC zawarte są w prostych $y = \frac{1}{2}x + 3$ i $y = -x + 4$. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wierzchołek C ma współrzędne $(2, 6)$.

Zadanie 16. (6 pkt)

W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dany jest wierzchołek $C(-2, 1)$. Prosta $y = 2x - 5$ jest symetralną boku AC , a jedna z wysokości trójkąta jest zawarta w prostej $y = x + 3$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego trójkąta.

Zadanie 17. (7 pkt) CKE

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(1, 4)$ i $B(-6, 3)$ leży na osi OX .

- a) Wyznacz równanie tego okręgu.
- b) Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i oddalonej od początku układu współrzędnych o $\sqrt{2}$.

Zadanie 18. (4 pkt) CKE

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu:

$$(x - 16)^2 + y^2 = 4$$

jest okrąg o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.