

## Zestaw D. Zadania otwarte

← odpowiedzi  
– s. 224  
modele  
– s. 225

### Zadanie 1. (7 pkt)

Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 i 6 losujemy kolejno trzy cyfry, które zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Kiedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że będzie to liczba większa od 430, jest większe: w przypadku losowania ze zwracaniem czy losowania bez zwracania?

### Zadanie 2. (6 pkt)

Na płaszczyźnie dane są dwie proste równoległe niepokrywające się. Na jednej z nich zaznaczono sześć punktów, a na drugiej –  $n$  punktów, gdzie  $n \geq 2$ . Oblicz  $n$ , jeśli prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane punkty spośród zaznaczonych są wierzchołkami trójkąta, jest równe  $\frac{9}{14}$ .

### Zadanie 3. (7 pkt)

W urnie są dwie kule białe i sześć kul czarnych. Losujemy dwie kule bez zwracania. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie kul o różnych kolorach czy wyciągnięcie kul tego samego koloru? Ile należy dołożyć kul białych, aby zdarzenia te były jednakowo prawdopodobne?

### Zadanie 4. (5 pkt)

Mamy  $n$  kul o numerach od 1 do  $n$  oraz  $n$  szuflad o numerach od 1 do  $n$ . Do każdej szuflady wkładamy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula o numerze 1 nie trafi do szuflady o numerze 1. Dla jakich  $n$  to prawdopodobieństwo jest większe od 0,9?

### Zadanie 5. (6 pkt)

Rzucamy siedem razy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wypadną tylko parzyste liczby oczek,                      b) pojawią się wszystkie liczby oczek.

### Zadanie 6. (4 pkt)

Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 tworzymy liczby ośmiocyfrowe, w których cyfry się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby, w której wszystkie cyfry nieparzyste są na początku, a cyfra 1 jest bezpośrednio przed cyfrą 2.

### Zadanie 7. (7 pkt)

Z grupy osób, w której jest 5 kobiet, wybrano trzyosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji jest więcej kobiet niż mężczyzn, wynosi  $\frac{6}{7}$ . Oblicz, ilu mężczyzn jest w tej grupie.

### Zadanie 8. (4 pkt)

Na dwóch ścianach sześcienną kostki są 2 oczka, na dwóch – 4 oczka, a na dwóch pozostałych – 6 oczek. Iloma co najmniej takimi kostkami trzeba rzucać, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od  $\frac{3}{4}$ ?

**Zadanie 9.** (4 pkt)

Przy okrągłym stole usiadło 10 dziewcząt i 10 chłopców. Sprawdź, czy prawdopodobieństwo, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie, jest większe od 0,001.

**Zadanie 10.** (4 pkt)

Ze zbioru  $1, 2, 3, \dots, 50$  losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej liczby przez drugą należy do przedziału  $(1; 2)$ .

**Zadanie 11.** (6 pkt)

W partii 50 żarówek pewna ich liczba jest wadliwa. Z tej partii losowo wybiera się dwie żarówki. Jeżeli co najmniej jedna z nich jest uszkodzona, partię się odrzuca. Oblicz, ile co najwyżej może być wadliwych żarówek, aby prawdopodobieństwo odrzucenia partii było nie większe od 0,04.

**Zadanie 12.** (5 pkt) CKE 2015

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynekę”, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

**Zadanie 13.** (5 pkt)

Oblicz  $P(A' \cup B')$ , jeśli  $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$ , a  $A \cup B$  jest zdarzeniem pewnym.

**Zadanie 14.** (4 pkt)

Mając dane  $P(A' \cap B') = 0,6$ , oblicz:

a)  $P(A \cup B)$ ,

b)  $P(A)$  i  $P(B)$ , jeśli  $A \cap B$  jest zdarzeniem niemożliwym, a  $P(B) = 2P(A)$ .

**Zadanie 15.** (2 pkt) CKE

Niech  $A, B$  będą zdarzeniami losowymi zawartymi w  $\Omega$ . Wykaż, że jeżeli  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , to  $P(A \cap B') = P(A)P(B')$ .

**Zadanie 16.** (3 pkt) CKE

Niech  $A, B$  będą zdarzeniami losowymi zawartymi w  $\Omega$ . Wykaż, że jeżeli  $P(A) = 0,7$  oraz  $P(B) = 0,8$ , to  $P(A|B) \geq 0,625$ .

**Zadanie 17.** (4 pkt) CKE

Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$  i gdy otrzymamy liczbę  $n$ , to rzucamy  $n$  razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

**Zadanie 18.** (4 pkt)

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba naturalna  $n$  spełniająca nierówność  $\binom{n}{n-3} \leq n$  jest pierwiastkiem wielomianu  $w(x) = (x^4 - 16)(x^2 - 16)$ ?

**Zadanie 19.** (3 pkt) CKE

Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prawdopodobieństwo  $p_k$  otrzymania liczby  $k$  dane jest wzorem  $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$ . Rozważamy dwa zdarzenia: zdarzenie  $A$  polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru  $\{1, 3, 5\}$ , zdarzenie  $B$  polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe  $P(A|B)$ .

**Zadanie 20.** (4 pkt) CKE 2015

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do drugiej urny i dodatkowo dokładamy do drugiej urny jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

**Zadanie 21.** (6 pkt)

Spośród liczb  $a, b, c, d$  wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie są liczbami całkowitymi, jeżeli:

$$a = \log_3(\log_2 \sqrt[3]{2}), \quad b = \log_3 \sqrt[3]{9} \cdot \log_2 \sqrt{8}, \quad c = \log_5 4 \cdot \log_2 5 + \log_2 3, \quad d = \frac{\log_5 7}{\log_9 7}$$

**Zadanie 22.** (7 pkt)

Z liczb  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) tworzymy trójwyrazowe ciągi, w których liczby mogą się powtarzać.

- a) Wyznacz prawdopodobieństwo utworzenia ciągu monotonicznego.
- b) Dla jakiego  $n$  prawdopodobieństwo to jest równe  $\frac{9}{16}$ ?

**Zadanie 23.** (3 pkt) CKE

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$ . Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

**Zadanie 24.** (4 pkt) CKE

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

**Zadanie 25.** (7 pkt) CKE

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

**Zadanie 26.** (6 pkt) CKE

Oblicz, ile jest stycyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

**Zadanie 27.** (6 pkt) CKE

Oblicz, ile jest wszystkich liczb stycyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.