Logarytmy

Musimy umieć obliczyć proste logarytmy bez użycia kalkulatora.

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Co ta definicja oznacza?

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Co ta definicja oznacza? Po pierwsze ważne są założenia: liczba a, którą nazywamy podstawą logarytmu musi być większa od 0 i różna od 1, a liczba b, czyli liczba logarytmowana musi być większa od 0.

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Co ta definicja oznacza? Po pierwsze ważne są założenia: liczba a, którą nazywamy podstawą logarytmu musi być większa od 0 i różna od 1, a liczba b, czyli liczba logarytmowana musi być większa od 0.

Wyrażenia takie, jak $\log_1 3$, $\log_{-2} 5$, czy $\log_4(-1)$ nie są określone w zbiorze liczb rzeczywistych (podobnie jak np. $\sqrt{-6}$).

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Po drugie wyrażenie $\log_a b = c$ oznacza, że liczba a podniesiona do potęgi c da liczbę b.

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Po drugie wyrażenie $\log_a b = c$ oznacza, że liczba a podniesiona do potęgi c da liczbę b. W praktyce, gdy chcemy obliczyć $\log_a b$, zadajemy sobie pytanie - do jakiej potęgi trzeba podnieść a, by otrzymać b?

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16$

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125$

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3}$

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8}$

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ponieważ $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ponieważ $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

e) $\log_4 2$

Przykłady

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ponieważ $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

e) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, ponieważ $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100$

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1$

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10}$

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

d) $\log \frac{\sqrt{10}}{10}$

Przykłady

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

d) $\log \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{1}{2}$, ponieważ $10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Przykłady

$\log_4 8 = ?$

Przykłady

$\log_4 8 =?$ W tego typu przypadkach mam dwie możliwości.

Mogę spróbować rozwiązać przykład w głowie myśląc mniej więcej tak: podnoszę 4 do potęgi $\frac{1}{2}$, by otrzymać 2, a później do 3 potęgi, by otrzymać 8. Ostatecznie muszę podnieść do potęgi $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

Przykłady

$\log_4 8 = ?$ W tego typu przypadkach mam dwie możliwości.

Mogę spróbować rozwiązać przykład w głowie myśląc mniej więcej tak: podnoszę 4 do potęgi $\frac{1}{2}$, by otrzymać 2, a później do 3 potęgi, by otrzymać 8. Ostatecznie muszę podnieść do potęgi $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

Możemy jednak po prostu zapisać odpowiednie równanie. Szukam liczby, do której trzeba podnieść 4, by otrzymać 8, czyli rozwiązuję równanie $4^x = 8$. Umiemy takie rówania rozwiązywać. Zapisujemy obie liczby jako potęgę 2:

$2^{2x} = 2^3$, czyli $2x = 3$ i mamy $x = \frac{3}{2}$.

Przykłady

$\log_4 8 =$? W tego typu przypadkach mam dwie możliwości.

Mogę spróbować rozwiązać przykład w głowie myśląc mniej więcej tak: podnoszę 4 do potęgi $\frac{1}{2}$, by otrzymać 2, a później do 3 potęgi, by otrzymać 8. Ostatecznie muszę podnieść do potęgi $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

Możemy jednak po prostu zapisać odpowiednie równanie. Szukam liczby, do której trzeba podnieść 4, by otrzymać 8, czyli rozwiązuję równanie $4^x = 8$. Umiemy takie rówania rozwiązywać. Zapisujemy obie liczby jako potęgę 2:

$2^{2x} = 2^3$, czyli $2x = 3$ i mamy $x = \frac{3}{2}$.

Czyli $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

Na kolejnych slajdach będą przykłady do przećwiczenia. Proszę za każdym razem spróbować rozwiązać je samemu. Jeśli są problemy, by zrobić to w głowie (co w trudniejszych przykładach jest oczywiste), to warto zapisać sobie odpowiednie równanie wykładnicze i je rozwiązać.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2}$

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5}$

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} = -\frac{1}{6}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} = -\frac{1}{6}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{25})^x = \sqrt[3]{5}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} = -\frac{1}{6}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{25})^x = \sqrt[3]{5}$.

d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} = -\frac{1}{6}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{25})^x = \sqrt[3]{5}$.

d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{8}} = -\frac{3}{2}$.

Przykłady

a) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$. Równanie do rozwiązania to $8^x = 4\sqrt{2}$.

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt[3]{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} = -\frac{1}{6}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{25})^x = \sqrt[3]{5}$.

d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{8}} = -\frac{3}{2}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{2})^x = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4}$

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2}$

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81}$

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81} = \frac{12}{5}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81} = \frac{12}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt[3]{3})^x = \sqrt[5]{81}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81} = \frac{12}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt[3]{3})^x = \sqrt[5]{81}$.

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt[3]{25}$

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81} = \frac{12}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt[3]{3})^x = \sqrt[5]{81}$.

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt[3]{25} = -\frac{4}{3}$.

Przykłady

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt{8})^x = \frac{1}{4}$.

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{8})^x = 2\sqrt[5]{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81} = \frac{12}{5}$. Równanie do rozwiązania to $(\sqrt[3]{3})^x = \sqrt[5]{81}$.

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt[3]{25} = -\frac{4}{3}$. Równanie do rozwiązania to $(\frac{1}{\sqrt{5}})^x = \sqrt[3]{25}$.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.