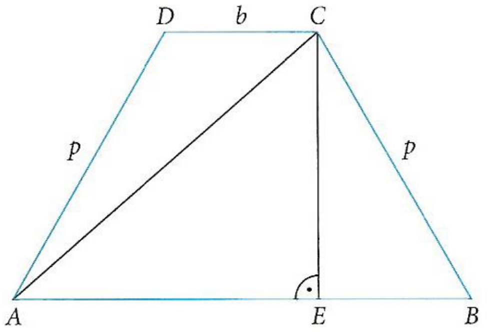
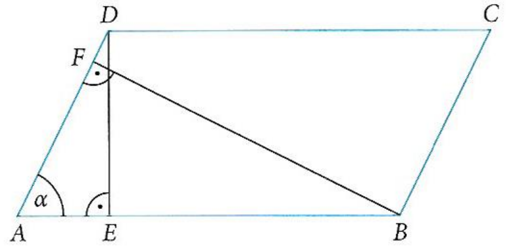
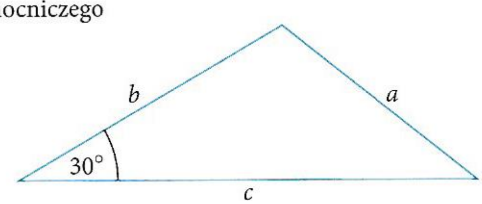
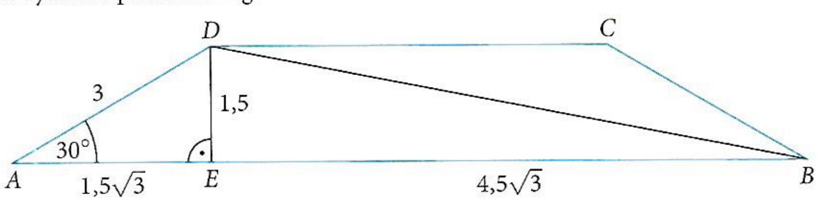
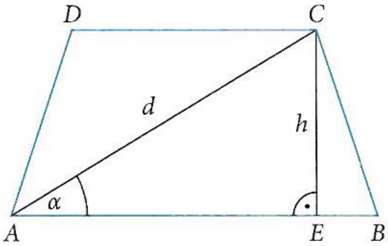
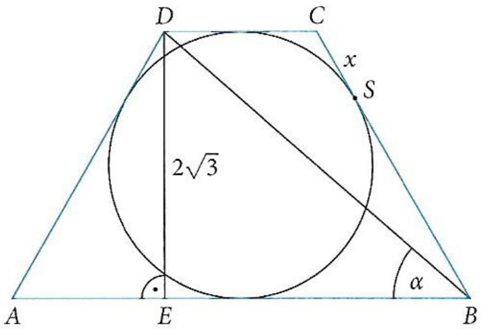
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

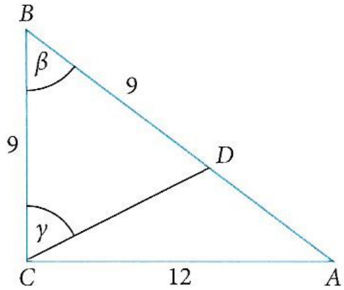
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykonanie rysunku pomocniczego oraz zapisanie zależności: $a + b = 2p$
	 $a = \|AB\|$ $b = \|CD\|$ $\|AD\| = \|CB\| = p$
	Obliczenie długości ramienia trapezu: $p = 4$ cm
	Zauważenie, że w trapezie równoramiennym $a + b = 2\|AE\|$, i wyznaczenie stąd $\|AE\| = 4$ cm
	Obliczenie długości odcinków CE i EB: $\|CE\| = 2\sqrt{3}$ cm, $\|EB\| = 2$ cm
	Obliczenie długości podstaw trapezu: $\|AB\| = 6$ cm, $\|DC\| = 2$ cm
2. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego
	
	Zauważenie, że trójkąty ADE i ABF są podobne, oraz zapisanie proporcji: $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{2,4}{4} = \frac{3}{5}$
	Obliczenie długości boków równoległoboku: $\|AB\| = 5$ cm, $\|AD\| = 3$ cm
2. b)	Obliczenie: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów długości przekątnej DB: $\|DB\| = 4$ cm
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów długości przekątnej AC: $\|AC\| = 2\sqrt{13}$ cm
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów cosinusa kąta rozwartego γ między przekątnymi: $\cos\gamma = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin 30^\circ} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie, i obliczenie stąd długości boku a: $a = 2$
	Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}bc\sin 30^\circ$ i zapisanie zależności: $bc = 4\sqrt{3}$
3.	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów i zapisanie zależności: $b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = 4$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} bc = 4\sqrt{3} \\ b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = 4 \end{cases}$
	Podanie długości boków: $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$ lub $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$ i zauważenie, że jest to taki sam trójkąt
	Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2}r$ i obliczenie promienia okręgu wpisanego: $r = 2\sqrt{3} - 3$
	Zapisanie zależności: $a^2 = x^2(13 - 12\cos\alpha)$ na podstawie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC, gdzie $a = \|AC\|$ i $x = \|DB\|$
4.	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBC i zapisanie zależności: $a^2 = x^2(10 - 6\cos(180^\circ - \alpha)) = x^2(10 + 6\cos\alpha)$
	Obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{1}{6}$
	Odczytanie z tablic trygonometrycznych: $\alpha \approx 80^\circ$
	Wykonanie rysunku pomocniczego 
5.	Obliczenie długości odcinka DB: $\|DB\| = 3\sqrt{7}$
	Zauważenie, że promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABD
	Porównanie wzorów na pole trójkąta ABD: $P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 1{,}5 = \frac{6\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{7}}{4R}$
	Wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trapezie: $R = 3\sqrt{7}$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td>6. a)</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego


Zauważenie, że w trapezie równoramiennym $ABCD$: $|AB| + |DC| = 2|AE|$
Zapisanie pola trapezu w postaci: $P = |AE|h$
Wyznaczenie z trójkąta AEC: $h = d\sin\alpha$, $|AE| = d\cos\alpha$
Zapisanie pola trapezu w postaci: $P = \frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$</td></tr>
<tr><td>6. b)</td><td>Zapisanie obwodu w postaci: $Obw = 2(|AB| + |DC|)$
Wykorzystanie obliczeń z podpunktu a) i zapisanie: $Obw = 4|AE| = 4d\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Oznaczenie pól trójkątów: $P_{AMS} = x$ i $P_{ALS} = y$ oraz zauważenie, że $P_{BMS} = 2x$ i $P_{CLS} = 3y$
Obliczenie pola trójkąta AMC: $P_{AMC} = 220$
Obliczenie pola trójkąta ALB: $P_{ALB} = 165$
Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x + 4y = 220 \\ 3x + y = 165 \end{cases}$
Rozwiązanie układu równań: $x = 40$, $y = 45$
Obliczenie pól trójkątów: $P_{AMS} = 40$, $P_{BMS} = 80$, $P_{ALS} = 45$, $P_{CLS} = 135$</td></tr>
<tr><td>8. a)</td><td>Wykonanie rysunku pomocniczego


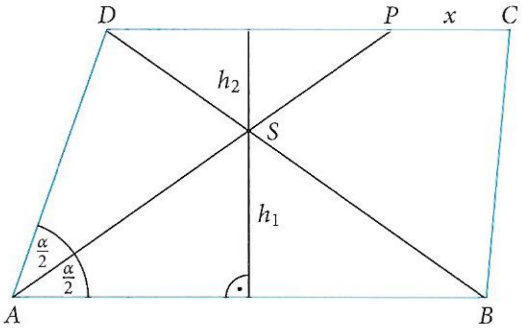
Zapisanie długości podstaw: $|AB| = 6x$, $|DC| = 2x$
Wyznaczenie długości odcinków: $|AE| = 2x$, $|EB| = 4x$
Zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED: $4x^2 + 12 = 16x^2$ i obliczenie $x = 1$
Podanie długości ramienia: $|AD| = 4x = 4$</td></tr>
</table>

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8. b)	Obliczenie długości przekątnej na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD: $$\lvert DB\rvert = 2\sqrt{7}$$ Obliczenie cosinusa kąta ABD: $\cos\lvert\sphericalangle ABD\rvert = \frac{2\sqrt{7}}{7}$
9.	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie długości odcinków AB i DA: $\lvert AB\rvert = 15$, $\lvert DA\rvert = 6$  Obliczenie $\cos\beta$: $\cos\beta = \frac{3}{5}$ Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD i obliczenie długości CD: $\lvert CD\rvert = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD i obliczenie cosinusa kąta γ: $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$ Obliczenie $\sin\beta$: $\sin\beta = \frac{4}{5}$ Skorzystanie z twierdzenia sinusów dla trójkąta BCD i obliczenie promienia okręgu opisanego na tym trójkącie: $R = \frac{9\sqrt{5}}{4}$ Obliczenie pola trójkąta BCD: $P = \frac{1}{2}\lvert BC\rvert \cdot \lvert BD\rvert \cdot \sin\beta = \frac{162}{5}$ Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta BCD: $P = \frac{\lvert BC\rvert + \lvert BD\rvert + \lvert CD\rvert}{2} \cdot r$ i obliczenie promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt: $r = \frac{9}{10}\left(5 - \sqrt{5}\right)$
10.	Oznaczenie miar kątów $\lvert\sphericalangle BAC\rvert = \alpha$ i $\lvert\sphericalangle ABC\rvert = \beta$ oraz zauważenie, że $\lvert\sphericalangle CAD\rvert = 180° - \alpha$ i $\lvert\sphericalangle CBE\rvert = 180° - \beta$ Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle DCA\rvert = \frac{\alpha}{2}$, $\lvert\sphericalangle ECB\rvert = \frac{\beta}{2}$ Obliczenie miary kąta $\gamma = \lvert\sphericalangle ECD\rvert$: $\gamma = 90° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 135°$ Wykorzystanie twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD: $\frac{\lvert ED\rvert}{\sin\gamma} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ECD Zauważenie, że $\lvert ED\rvert = 2p$ oraz $\sin\lvert\sphericalangle ECD\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Wyznaczenie długości promienia: $R = p\sqrt{2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania

11.

Wykonanie rysunku pomocniczego



Uzasadnienie, że $|\sphericalangle APD| = \frac{\alpha}{2}$, czyli trójkąt APD jest równoramienny i $|DP| = 6$

Zauważenie, że trójkąty ABS i PDS są podobne, więc: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{5}$

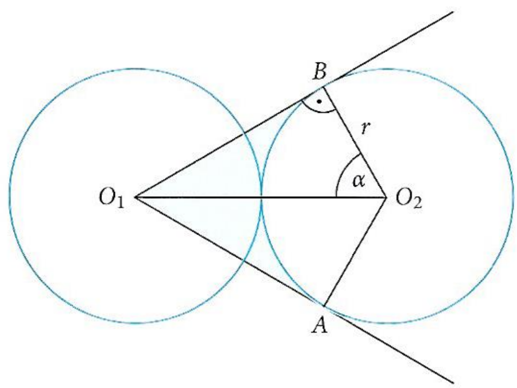
Zapisanie zależności $P_{ABCP} = 2P_{ABS}$ w postaci:

$$\frac{10+x}{2}(h_1 + h_2) = 10h_1$$

Obliczenie: $x = 2{,}5$ i $|DC| = 8{,}5$

12.

Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie, że $|O_1O_2| = 2r$, gdzie r jest promieniem kół



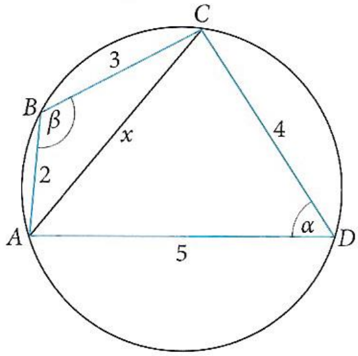
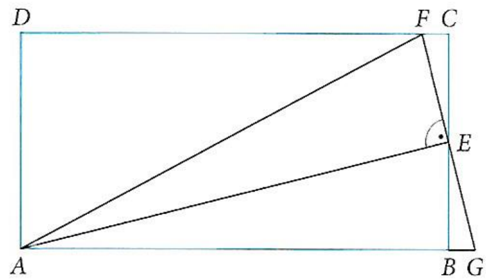
Obliczenie: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha = 60°$

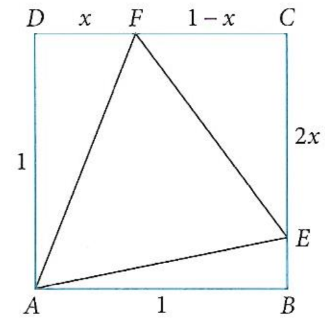
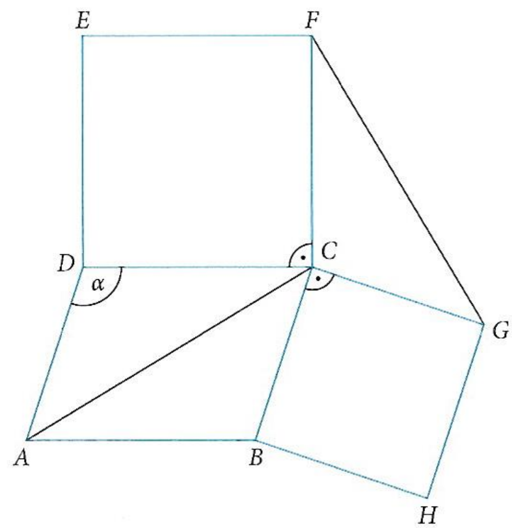
Obliczenie długości odcinka O_1B: $|O_1B| = \sqrt{3}r$ i pola czworokąta AO_1BO_2: $P_1 = \sqrt{3}r^2$

Wyznaczenie pola wycinka koła AO_2B: $P_2 = \frac{1}{3}\pi r^2$

Zapisanie pola zacieniowanej figury jako: $P = P_1 - P_2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}r^2$

Wyznaczenie pola koła: $S = \pi r^2 = \frac{3\pi P}{3\sqrt{3}-\pi}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń  Zauważenie, że skoro na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to $\beta = 180° - \alpha$ Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ADC i ABC: $x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos\alpha = 41 - 40\cos\alpha$ $x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos\beta = 13 - 12\cos\beta = 13 + 12\cos\alpha$ Wyznaczenie wartości $\cos\alpha$: $41 - 40\cos\alpha = 13 + 12\cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = \frac{7}{13}$ Wyznaczenie x: $x^2 = 41 - 40 \cdot \frac{7}{13} = \frac{253}{13}$, czyli $x = \sqrt{\frac{253}{13}}$
14.	Wykonanie rysunku (odcinki AB i EF przedłużamy do przecięcia w punkcie G)  Zauważenie, że trójkąty ECF i EBG są przystające ($\lvert CE\rvert = \lvert BE\rvert$, $\lvert\sphericalangle CEF\rvert = \lvert\sphericalangle BEG\rvert$ oraz oba trójkąty są prostokątne), zatem $\lvert EF\rvert = \lvert EG\rvert$ Zauważenie, że trójkąty AEF i AEG są przystające ($\lvert EF\rvert = \lvert EG\rvert$, oba trójkąty są prostokątne oraz AE jest ich wspólną przyprostokątną), zatem $\lvert\sphericalangle EAF\rvert = \lvert\sphericalangle EAB\rvert$
15.	Oznaczenie punktu przecięcia prostych ME i CD przez N Zauważenie, że trójkąty AME i DNE są podobne na podstawie cechy KKK, czyli $\frac{\lvert AM\rvert}{\lvert AE\rvert} = \frac{\lvert DN\rvert}{\lvert DE\rvert}$, oraz wyznaczenie $\lvert DN\rvert = \frac{2}{3}\lvert AM\rvert$ Zauważenie, że trójkąty MBP i NDP są podobne na podstawie cechy KKK, czyli $\frac{\lvert BP\rvert}{\lvert BM\rvert} = \frac{\lvert DP\rvert}{\lvert DN\rvert}$, oraz zapisanie $\lvert BP\rvert = \frac{4\lvert AM\rvert \cdot \lvert DP\rvert}{\lvert DN\rvert}$ Wykazanie, że $\lvert BP\rvert = 6\lvert DP\rvert$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego i podanie założenia: $x \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$  Zapisanie wzoru na pole trójkąta AEF: $$P = 1 - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{ADF}$$ Wyznaczenie $P(x)$: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ Wyznaczenie współrzędnej x_w wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{1}{4}$ i podanie odpowiedzi
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Zauważenie, że $\lvert AD \rvert = \lvert CG \rvert$ oraz $\lvert DC \rvert = \lvert CF \rvert$ Zauważenie, że $\lvert \sphericalangle DCB \rvert = 180^\circ - \alpha$ oraz $\lvert \sphericalangle FCG \rvert = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 180^\circ - \alpha) = \alpha$ Zauważenie, że trójkąty ACD i CFG są przystające, więc $\lvert AC \rvert = \lvert FG \rvert$
18.	Obliczenie miar dwóch kątów wpisanych opartych na łukach $P_{11}P_{16}$ oraz P_1P_{22}: $$\lvert \sphericalangle P_{16}P_1P_{11} \rvert = 37{,}5^\circ, \ \lvert \sphericalangle P_1P_{11}P_{22} \rvert = 22{,}5^\circ$$ Obliczenie miary kąta $P_{11}AP_{16}$: $\lvert \sphericalangle P_{11}AP_{16} \rvert = 180^\circ - (180^\circ - 22{,}5^\circ - 37{,}5^\circ) = 60^\circ$