Zestaw D. Zadania otwarte

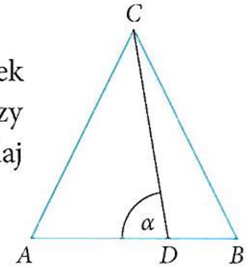
odpowiedzi – s. 190
modele – s. 191

Zadanie 1. (5 pkt)
Przekątna trapezu równoramiennego ma długość $2\sqrt{7}$ cm, a jego obwód jest równy 16 cm. Oblicz długości boków trapezu, jeżeli wiadomo, że w ten trapez można wpisać okrąg.

Zadanie 2. (7 pkt)
Wysokości równoległoboku wynoszą 2,4 cm i 4 cm, a jego obwód jest równy 16 cm.
a) Oblicz długości boków równoległoboku.
b) Oblicz cosinus kąta rozwartego między przekątnymi tego równoległoboku.

Zadanie 3. (7 pkt)
Miara jednego z kątów trójkąta jest równa 30°. Pole tego trójkąta wynosi $\sqrt{3}$, a promień okręgu na nim opisanego jest równy 2. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

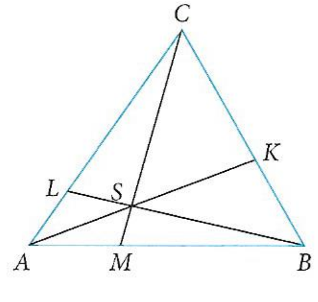
Zadanie 4. (5 pkt)
Punkt D należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest dwa razy dłuższy, a odcinek DC – trzy razy dłuższy od odcinka DB. Oblicz $\cos\alpha$. Korzystając z tablic trygonometrycznych, podaj miarę kąta α z dokładnością do 1°.



Zadanie 5. (5 pkt)
Kąt przy podstawie trapezu równoramiennego ma miarę 30°. Dłuższa podstawa jest równa $6\sqrt{3}$, a ramię ma długość 3. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

Zadanie 6. (7 pkt)
Przekątna trapezu równoramiennego ma długość d i jest nachylona do dłuższej podstawy pod kątem α. Wykaż, że:
a) pole tego trapezu jest równe $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$,
b) jeżeli w ten trapez można wpisać okrąg, to obwód trapezu jest równy $4d\cos\alpha$.

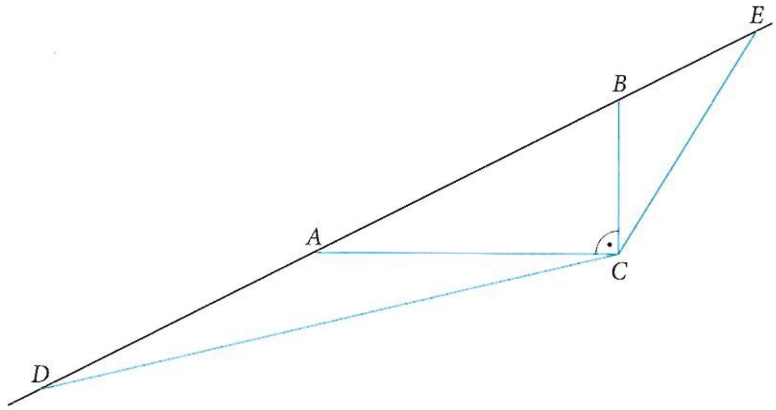
Zadanie 7. (6 pkt) CKE
Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (rysunek obok). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.



Zadanie 8. (6 pkt)
Na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$ opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $|SB| = 3|CS|$. Oblicz:
a) długość ramienia tego trapezu,
b) cosinus kąta ABD.

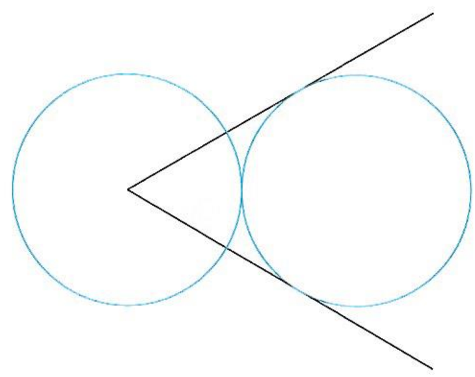
Zadanie 9. (7 pkt)
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AC i BC mają długości odpowiednio 12 i 9. Na boku AB wybrano taki punkt D, że odcinki BC i BD są równe. Oblicz cosinus kąta BCD, promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 10. (6 pkt) CKE
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (rysunek poniżej). Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.



Zadanie 11. (5 pkt)
W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa $|AB| = 10$, a ramię $|AD| = 6$. Dwusieczna kąta BAD przecina podstawę DC w punkcie P. Oblicz długość krótszej podstawy trapezu, jeżeli pole czworokąta $ABCP$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABS, gdzie S jest punktem przecięcia odcinka AP z przekątną DB.

Zadanie 12. (6 pkt)
Dwa okręgi o równych promieniach są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu (rysunek obok). Wykaż, że pole koła ograniczonego każdym z tych okręgów jest równe $\frac{3P\pi}{3\sqrt{3}-\pi}$, gdzie P jest polem zacienionej figury.

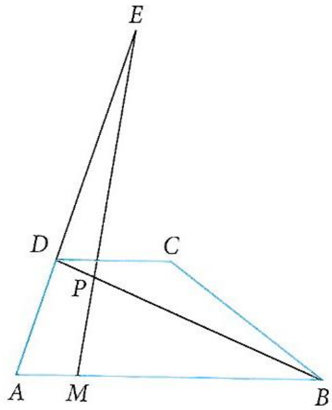


Zadanie 13. (4 pkt) CKE 2015
Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

Zadanie 14. (3 pkt) CKE 2015
Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| > |BC|$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $|\sphericalangle AEF| = 90°$. Udowodnij, że $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAF|$.

Zadanie 15. (3 pkt) CKE

Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3|AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4|AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (rysunek obok). Udowodnij, że $|BP| = 6|PD|$.

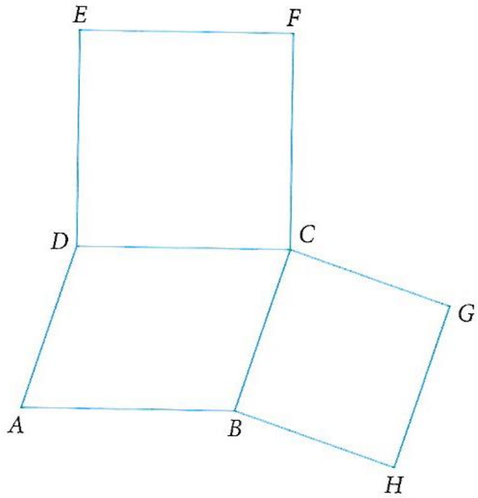


Zadanie 16. (4 pkt) CKE

Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, by $|CE| = 2|DF|$. Oblicz wartość $x = |DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Zadanie 17. (4 pkt) CKE

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.



Zadanie 18. (3 pkt) CKE

Punkty $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16}. Udowodnij, że $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60°$.