PRÓBNA MATURA

Imię i nazwisko:

Wynik:

Zadanie 1. ***(2 punkty)***
Wykaż, że nierówność:

$$2x^2 + y^2 + 4x + 5 > 2xy$$

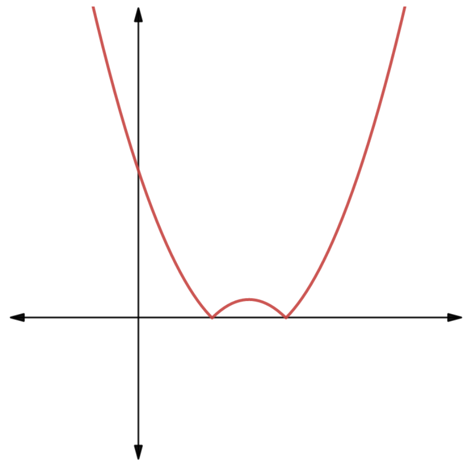
jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

Zadanie 2. ***(2 punkty)***

Pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + 3x^2 + mx + n$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Oblicz wartości współczynników m oraz n.

Zadanie 3. ***(2 punkty)***

Poniższy diagram przedstawia część wykresu funkcji $f(x) = |\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4|$.



Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m^2$ ma dwa dodatnie rozwiązania.

Zadanie 4. ***(2 punkty)***
Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi dane równaniami:

$$o_1 : (x+1)^2 + (y-m)^2 = 2$$

$$o_2 : (x+m)^2 + (y-1)^2 = 8$$

są styczne zewnętrznie.

Zadanie 5. ***(3 punkty)***
Części wytwarzane przez daną maszynę muszą mieć wagę pomiędzy 120 a 130 gramów, by przejść kontrolę. Prawdopodobieństwo, że dana część ma wagę mniejszą od 120 gramów wynosi 0.1 natomiast prawdopodobieństwo, że ma wagę większą od 130 gramów 0.025. Do kontroli wybrano w sposób losowy 16 cześci. Obicz prawdopodobieństwo, że co najmniej 2 części nie przeszły kontroli.

Zadanie 6. ***(3 punkty)***
W pudełku A znajduje się 5 kul czerwonych i 3 zielone. W pudełku B są 3 kule czerwone i pewna liczba kul zielonych. W pudełku C jest jedna kula z literą A oraz 4 kule z literą B. Najpierw losujemy kulę z pudełka C, a następnie jedną z pudełka, które wskazała kula wylosowana z pudełka C. Prawdodobieństwo wylosowania czerwonej kuli wynosi $\frac{73}{200}$. Oblicz, ile jest zielonych kul w pudełku B.

Zadanie 7. ***(3 punkty)***

Ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = \binom{3n+1}{3n-1}$. Ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, gdzie $b_2 = 5$ oraz $b_5 = 17$. Niech S_n oznacza sumę pierwszych n wyrazów ciągu (b_n). Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$.

Zadanie 8. ***(3 punkty)***

W trójkąt prostokątny wpisano okrąg o promieniu r. Na tym samym trójkącie opisano okrąg o promieniu $2r$. Wykaż, że pole trójkąta wynosi $5r^2$.

Zadanie 9. ***(3 punkty)***

Pierwsze trzy wyrazy pewnego ciągu geometrycznego są odpowiednio pierwszym, czwartym i szesnastym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz wartości tych wyrazów, jeśli wiadomo, że ich suma wynosi 63.

Zadanie 10. ***(4 punkty)***
Rozwiąż równanie
$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 1$$
dla $x \in \langle -2\pi, -\pi \rangle$.

Zadanie 11. ***(4 punkty)***
Spośród cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ losujemy bez zwracania kolejno 5 cyfr, które zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę pięciocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba zawiera dokładnie 2 cyfry nieparzyste i te cyfry ze sobą sąsiadują?

Zadanie 12. ***(4 punkty)***

Dany jest trójkąt ABC, w którym stosunki długości boków wynoszą
$|BC| : |AC| = 2 : 3$ oraz $|BC| : |AB| = 1 : 2$. Na boku AB zaznaczono punkt D w taki sposób, że $|BC| : |CD| = 4 : 3$. Wyznacz $|AD| : |BD|$.

Zadanie 13. ***(5 punktów)***
Dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x - y = k + 1 \\ 2x - y = 5 - k \end{cases}$$

spełnia para liczb (x, y), dla których prawdziwa jest nieróność:

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{y} \geqslant 2$$

Zadanie 14. ***(5 punktów)***
Dany jest okrąg o równaniu:

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$$

Wyznacz równania stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt $(-3, 2)$. Następnie wyznacz równania dwusiecznych kątów między tymi stycznymi.

Zadanie 15. ***(5 punktów)***
Oblicz, dla jakich wartości parametru m równanie:

$$(2x+1)[(2m^2+m-1)x^2+(5-m)x-6]=0$$

ma więcej pierwiastków dodatnich niż ujemnych.