Zadanie 1. [2 *punkty*]
Suma pierwszych n wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = n^2 - 3n$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Zadanie 2. [2 *punkty*]
Suma pierwszych n wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = 5 \cdot 2^n - 5$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny.

Zadanie 3. [3 *punkty*]
W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz wynosi 10, natomiast piąty 16. Oblicz:

$$a_{11} + a_{13} + a_{15} + ...a_{99}$$

czyli sumę wyrazów o numerach dwucyfrowych, nieparzystych.

Zadanie 4. [4 *punkty*]
W ciągu arytmetycznym iloczyn drugiego i trzeciego wyrazu wynosi 15, natomiast suma trzeciego i piątego wynosi 2. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu jest większych od -100, jeśli wiadomo, że ciąg ten jest malejący.

Zadanie 5. [4 *punkty*]
$x + 4,\ x,\ \frac{x}{x+1}$ tworzą drugi, trzeci i czwarty wyraz nieskończonego, malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6. [4 *punkty*]
Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi $\frac{15}{2}$, natomiast suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych wynosi $\frac{15}{8}$. Wiedząc, że ciąg ten jest malejący, oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach podzielnych przez 3.

Zadanie 7. [4 *punkty*]
W ciągu arytmetycznym (a_n) trzeci wyraz wynosi 29, natomiast siódmy wynosi 17. W nieskończonym ciągu geometrycznym b_n mamy $b_1 = a_2$, $b_2 = a_{10}$ oraz $b_3 = a_k$. Oblicz k oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu b_n o numerach nieparzystych.

Zadanie 8. [3 *punkty*]
Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym oraz $a+b+c = 15$. Ciąg $(a, b+1, c+5)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz możliwe a, b i c.

Zadanie 9. [4 *punkty*]

Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem liczbowym. Ciag $b_n = 2^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 8. Oblicz

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + ... + a_{97} + a_{98}$$

czyli sumę wyrazów ciągu a_n o numerach mniejszych od 100 i niepodzielnych przez 3.

Zadanie 10. [3 *punkty*]

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych większych od 200 i mniejszych od 700, których reszta z dzielenia przez 6 jest 1 lub 5.

Zadanie 11. [3 *punkty*]

Dany jest następujący szereg geometryczny:

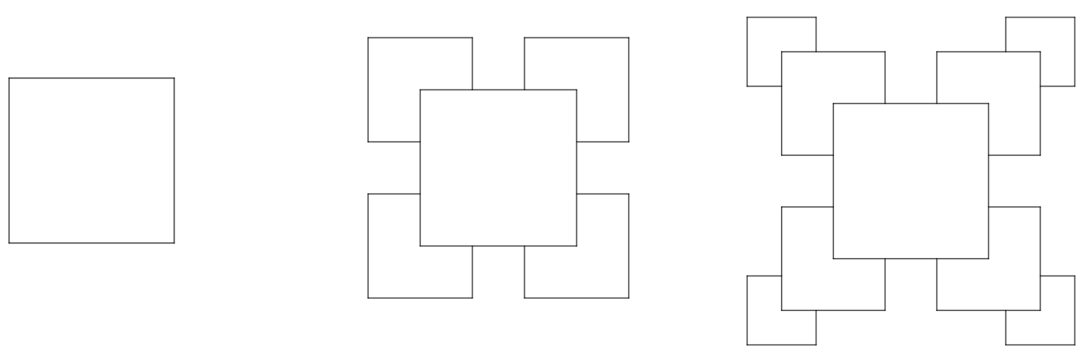
$$1 + \frac{4x}{5+x^2} + \left(\frac{4x}{5+x^2}\right)^2 + ...$$

a) Wykaż, że szereg ten jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

b) Oblicz x, jeśli powyższa nieskończona suma wynosi 3.

Zadanie 12. [4 *punkty*]

Tworzymy figurę w następujący sposób. Rozpoczynam od kwadratu o boku a. W każdym kolejnym kroku w górnym lewym, górnym prawym, dolnym lewym oraz dolnym prawym rogu poprzedniej figury umieszczamy kwadrat (czwarta część nowego kwadratu pokrywa się z poprzednim). Kwadraty umieszczone w kroku $n+1$ mają bok długości $\frac{2}{3}$ razy mniejszej od długości boków umieszczonych w kroku n. Pierwsze trzy kroki przedstawione są poniżej:

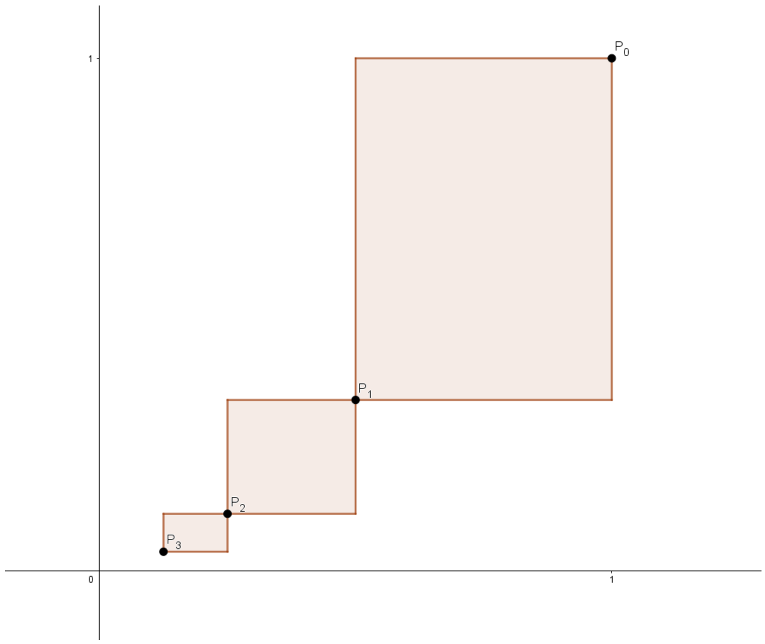


Wykonujemy nieskończoną liczbę kroków. Pole otrzymanej figury to 105. Oblicz a.

Zadanie 13. [5 *punktów*]

Dany jest ciąg punktów $P_0(1,1),\ P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{3}),\ P_2(\frac{1}{4},\frac{1}{9}),...,P_n(\frac{1}{2^n},\frac{1}{3^n}),....$

a) Tworzymy ciag protokątów $R_1,R_2,R_3,...$ takich, że prostokąt R_n ma boki równoległe do osi OX i OY i dwa przeciwległe wierzchołki w punktach P_{n-1} i P_n.



   i. Oblicz pole prostokąta R_1.

   ii. Oblicz sumę pól wszystkich prostokątów.

b) Na każdym prostokącie R_n opisujemy okrąg O_n.

   i. Oblicz pole koła odpowiadającemu okręgowi O_1.

   ii. Oblicz sumę pól wszystkich kół.