9.73. Na okręgu o promieniu r opisano romb, którego jeden z kątów wewnętrznych ma miarę $150°$.

a) Wykaż, że długości: krótszej przekątnej d_1, boku a rombu i dłuższej przekątnej d_2 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

b) Oblicz stosunek pola P_1 rombu do pola P_2 koła wpisanego w ten romb.

9.74. Oblicz pole P trapezu o podstawach długości a i $4a$, jeśli można na nim opisać okrąg i można w niego wpisać okrąg.

9.75. Długości ramion a i b trapezu są równe odpowiednio 5 cm i 3 cm. Odcinek łączący środki tych ramion dzieli trapez na dwie części w ten sposób, że stosunek ich pól równy jest $\frac{5}{11}$. Oblicz pole P trapezu wiedząc, że można wpisać w niego okrąg.

9.76. Bok AB czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta, jeżeli $|BC| = |CD|$ i $|\sphericalangle DBC| = 20°$.

9.77. Każdy z czterech okręgów jest styczny zewnętrznie do dwóch spośród trzech pozostałych. Uzasadnij, że środki tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg.

9.78. W czworokącie $ABCD$ okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne zewnętrznie. Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

9.79. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg długości łuków odpowiadającym cięciwom AB, BC i CD są równe. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

9.80. Trapez równoramienny o przekątnej długości 5 cm i obwodzie 16 cm, jest opisany na okręgu. Oblicz długość promienia r okręgu wpisanego w ten trapez i długość promienia R okręgu opisanego na nim.

9.81. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg: $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = 4$ i $|AD| = 3$. Oblicz:

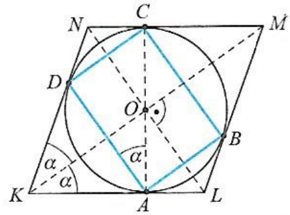
a) cosinus kąta między najkrótszymi bokami,

b) sinus kąta między najdłuższymi bokami,

c) pole czworokąta.

9.82. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód L i pole P czworokąta, wiedząc że $|AB| = |BC|$, $|\sphericalangle ADC| = 120°$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD jest równy $2:1$.

9.83. Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości 13 i 15, a pole trapezu jest równe 168. Oblicz pola czterech trójkątów, na jakie przekątne dzielą ten trapez.



9.72. **a)** $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}r,\ d_1=4r,\ d_2=\frac{4\sqrt{3}}{3}r$, **b)** $\frac{c}{d}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie

$|KL|=|LM|=|MN|=|NK|=a,\ |AB|=|DC|=c,\ |AD|=|BC|=d,\ |KM|=d_1,$

$|NL|=d_2$ i $d_1>d_2,\ |CA|=h=2r$.

a) Zauważ, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem i jego boki są równoległe do przekątnych rombu $KLMN$.

Ponieważ $|\sphericalangle OKL|=|\sphericalangle DAC|$, jako kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych, więc trójkąty prostokątne OKL i DAC są podobne.

Ponieważ $P_1=4P_{\Delta OKL}$ i $P_2=2P_{\Delta DAC}$ oraz $\frac{P_1}{P_2}=\frac{8}{3}$, więc $\frac{P_1}{P_2}=\frac{4P_{\Delta OKL}}{2P_{\Delta DAC}}$, zatem $\frac{P_{\Delta OKL}}{P_{\Delta DAC}}=\frac{4}{3}$.

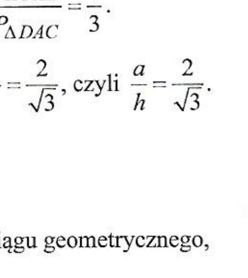
Wnioskujemy, że trójkąty OKL i DAC są podobne w skali k równej $\frac{2}{\sqrt{3}}$, więc $\frac{|KL|}{|AC|}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, czyli $\frac{a}{h}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ponieważ $\frac{h}{a}=\sin 2\alpha$, gdzie $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, więc $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem $2\alpha=60°$.

9.73. **b)** $\frac{P_1}{P_2}=\frac{8}{\pi}$. *Wskazówka:* **a)** $2a\sin 15°,\ a,\ 2a\cos 15°$ – trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, bo $\frac{d_1}{2a}=\sin 15°,\ \frac{d_2}{2a}=\cos 15°$.

9.74. $P=5a^2$. *Wskazówka:* Trapez wpisany w okrąg jest równoramienny, a w trapezie opisanym na okręgu suma długości ramion jest równa sumie długości podstaw.

9.75. $P=\frac{8}{3}\sqrt{14}\text{cm}^2$. *Wskazówka:* Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Z warunku zadania:



1° $a+b=8$, więc długość odcinka łączącego środki ramion jest równa

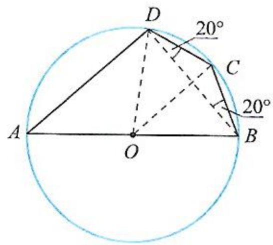
$\frac{a+b}{2}=4$ (bo w trapez można wpisać okrąg) oraz $h_1=h_2=r$, bo

$h=|DF|=2r$ i $\frac{h_1}{h_2}=1$,

2° $\begin{cases}\dfrac{\dfrac{b+\frac{a+b}{2}}{2}\cdot r}{\dfrac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\cdot r} \\ a+b=8\end{cases}$, więc $\begin{cases}\dfrac{3b+a}{3a+b}=\dfrac{5}{11} \\ a+b=8\end{cases}$, skąd $\begin{cases}a=7\\ b=1\end{cases}$.

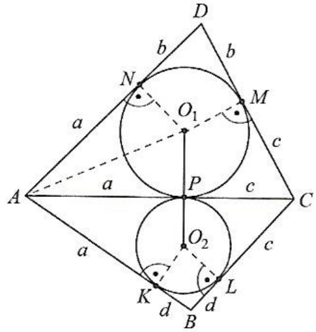
W trójkątach prostokątnych AFD i CEB mamy $\begin{cases}h^2+(6-x)^2=25\\ h^2+x^2=9\end{cases}$, skąd $x=\frac{5}{3}$ i $h=\frac{2}{3}\sqrt{14}$.

9.76. 40°, 70°, 140°, 110°. *Wskazówka:* Czworokąt $OBCD$ jest deltoidem, bo prosta OC jest dwusieczną kąta BCD.

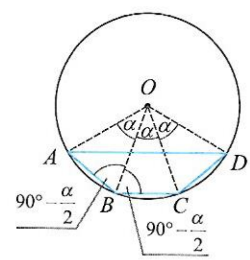


9.77. *Wskazówka:* Wystarczy wykazać, że sumy długości przeciwległych boków są równe.

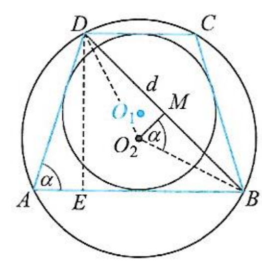
9.78. *Wskazówka:* Odcinki styczne są równej długości oraz sumy boków przeciwległych są równe.



9.79. *Wskazówka:* Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Wyznacz miary kątów ABC i BCD w zależności od środkowego kąta α i wykaż, że $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CDA|$.



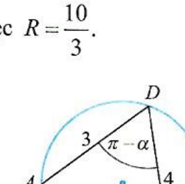
9.80. $r = \frac{3}{2}$; $R = \frac{10}{3}$. *Wskazówka:* Przyjmując oznaczenia, jak na rysunku, i zakładając, że: $|AB| = a$, $|DC| = b$, $|AD| = |BC| = c$, $|DB| = d = 5\text{cm}$, $|DE| = h$, $|DO_2| = R$, $|AE| = \frac{a-b}{2}$, $|EB| = \frac{a+b}{2}$. Ponieważ trapez jest opisany na okręgu o promieniu r, mamy $h = 2r$ i $a + b = 2c$. Stąd $c = \frac{a+b}{2} = 4$.



Z twierdzenia Pitagorasa: $h = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$.

Zauważamy, że $|\sphericalangle DO_2B| = 2|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$ (z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, opartym na tym samym łuku). W ΔO_2MB: $\frac{d}{2R} = \sin\alpha$, skąd $R = \frac{d}{2\sin\alpha}$. W ΔAED: $\sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{3}{4}$, więc $R = \frac{10}{3}$.

9.81. **a)** $\cos\alpha = -\frac{5}{7}$, **b)** $\sin(\pi - \alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, **c)** $P_{ABCD} = 2\sqrt{6}$.



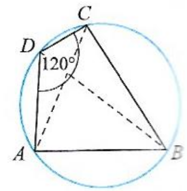
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z własności czworokąta wpisanego w okrąg $|\sphericalangle CDA| = \pi - \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów dla ΔABC: $p^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\cos\alpha$ oraz ΔACD: $p^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4\cos(\pi - \alpha)$. Z równości $5 - 4\cos\alpha = 25 + 24\cos\alpha$ obliczamy $\cos\alpha = -\frac{5}{7}$.

Ponieważ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, gdzie $90° < \alpha < 180°$, więc $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{49}}$.

$P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sin(\pi - \alpha)$.

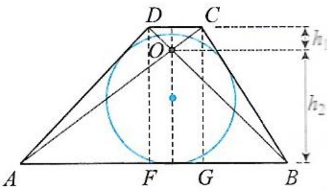


9.82. $L=14\sqrt{3}+3\sqrt{21}$, $P=\dfrac{189\sqrt{3}}{4}$. *Wskazówka:* Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Zauważamy, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym (bo $|\sphericalangle ABC|=180°-120°$ i $|\sphericalangle CAB|=|\sphericalangle ACB|$). Ponieważ okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest również okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym ABC, więc bok tego trójkąta ma długość równą $7\sqrt{3}$.

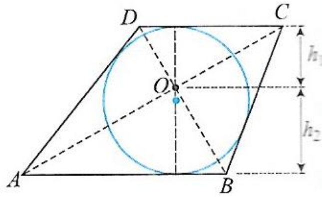
Ponieważ $|\sphericalangle ACB|=60°$, więc $|\sphericalangle ADB|=60°$ (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

Z warunku $\dfrac{P_{\Delta ADB}}{P_{\Delta BCD}}=\dfrac{2}{1}$ wynika, że $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DB|\cdot\sin 60°}{\frac{1}{2}\cdot|DC|\cdot|DB|\cdot\sin 60°}=2$, skąd $|AD|=2|DC|$. Stosując twierdzenie cosinusów dla ΔACD otrzymujemy równanie $\left(7\sqrt{3}\right)^2=|AD|^2+|DC|^2-2\cdot|AD|\cdot|DC|\cdot\cos 120°$, skąd $|DC|=\sqrt{21}$, zatem $|AD|=2\sqrt{21}$.

9.83. $\dfrac{189}{2}, \dfrac{21}{2}, \dfrac{63}{2}, \dfrac{63}{2}$ lub $\dfrac{384}{7}, \dfrac{216}{7}, \dfrac{288}{7}, \dfrac{288}{7}$.



Wskazówka: Zauważamy, że istnieją dwa przypadki opisania trapezu $ABCD$ na okręgu. Przyjmujemy oznaczenia, jak na rysunkach obok, gdzie $|AF|=x$, $|FG|=z$, $|GB|=y$ i wtedy $|AB|=x+z+y$.



Wysokość trapezu $h=h_1+h_2$, gdzie h_1 – wysokość ΔDOC, h_2 – wysokość ΔAOB. $|DF|=|CG|=h=2R$.

Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc jego wysokość $h=2R$, gdzie R – długość promienia okręgu oraz $|AB|+|DC|=|AD|+|BC|$.

Zatem $|AB|+|DC|=28$, (bo $|AD|=15$, $|BC|=13$), $x+y+z+z=28$, więc $x+y+2z=28$.

$P_{ABCD}=\dfrac{|AB|+|DC|}{2}\cdot h$, a z warunków zadania $P_{ABCD}=168$, więc $h=12$.

1° Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkątach prostokątnych: ΔAFD: $x^2=15^2-12^2=81$, skąd $x=9$, ΔBGC: $y^2=13^2-12^2=25$, skąd $y=5$. Ponieważ $x+y+2z=28$, więc $z=7$.

Z podobieństwa trójkątów DCO i ABO wynika, że $\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{7}{21}=\dfrac{1}{3}$, stąd $h_1=3$ i $h_2=9$. Przekątne trapezu dzielą go na cztery trójkąty, których pola: $P_{\Delta ABO}=\dfrac{|AB|\cdot h_2}{2}=\dfrac{21\cdot 9}{2}=\dfrac{189}{2}$; $P_{\Delta DCO}=\dfrac{|DC|\cdot h_1}{2}=\dfrac{7\cdot 3}{2}=\dfrac{21}{2}$;

$P_{\Delta BCO}=P_{\Delta ABC}-P_{\Delta ABO}=\dfrac{21\cdot 12}{2}-\dfrac{189}{2}=\dfrac{63}{2}$; $P_{\Delta ADO}=P_{\Delta DCA}-P_{\Delta DCO}=\dfrac{7\cdot 12}{2}-\dfrac{21}{2}=\dfrac{63}{2}$.

2° Postępując podobnie jak w przypadku 1°, otrzymamy: $P_{\Delta ABO}=\dfrac{384}{7}$; $P_{\Delta DCO}=\dfrac{216}{7}$; $P_{\Delta BCO}=\dfrac{288}{7}$.