# Funkcje homograficzne

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Zacznijmy od definicji:

**Definicja**

Funkcja homograficzna to funkcja postaci $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Zacznijmy od definicji:

**Definicja**

Funkcja homograficzna to funkcja postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Ta definicja nie jest szczególnie istotna. Warunek $ad - bc \neq 0$ jest po to, by nie dało się wszystkiego skrócić. Przykładowo funkcja $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ nie jest funkcją homograficzną, bo wszystko się skraca i otrzymujemy $f(x) = 2$.

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Zacznijmy od definicji:

**Definicja**

Funkcja homograficzna to funkcja postaci $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Ta definicja nie jest szczególnie istotna. Warunek $ad - bc \neq 0$ jest po to, by nie dało się wszystkiego skrócić. Przykładowo funkcja $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ nie jest funkcją homograficzną, bo wszystko się skraca i otrzymujemy $f(x) = 2$.

Sama nazwa też nie jest istotna. Stosuję się ją tylko w polskim programie.

Na lekcji rysowaliśmy daną funkcję startując od $\frac{1}{x}$ i stosując odpowiednie przekształcenia.

Na lekcji rysowaliśmy daną funkcję startując od $\dfrac{1}{x}$ i stosując odpowiednie przekształcenia. Na tej prezentacji omówiony zostanie bardziej bezpośredni sposób.

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymtopta,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -\frac{d}{c}$,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota,

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{a}{c}$.

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{a}{c}$.

Musimy jeszcze pamiętać, że funkcja będzie symetryczna wzlgędem punktu przecięcia asymptot.

# Wykresy

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią $OY$, podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią $OX$, podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{a}{c}$.

Musimy jeszcze pamiętać, że funkcja będzie symetryczna wzlgędem punktu przecięcia asymptot.

Nie warto uczyć się tych wzorów na pamięć. Lepiej po prostu umieć wszystko wyliczyć w konkretnym przypadku.

# Asymptoty

Kilka słów wyjaśnienia odnośnie asymptot.

# Asymptoty

Kilka słów wyjaśnienia odnośnie asymptot. Pionowa asymptota występuje wtedy, gdy mamy dzielenie niezerowej liczby przez 0, czyli dla danego $x$ licznik jest niezerową liczbą, a mianownik wynosi 0. Nasza funkcja jest wtedy niezdefiniowana, ale bardzo blisko tego $x$ funkcja przyjmuje wartości bardzo duże na plusie lub na minusie (bliskie $\infty$ lub $-\infty$). Chodzi o to, że dzielimy jakąś liczbę przez coś co jest *prawie* zerem, więc wychodzi nam *prawie* $\pm\infty$.

# Asymptoty

Asymptota pozioma to pozioma prosta, do które nasza funkcja się zbliża, gdy $x$ jest bardzo duży na plusie lub minusie (a dokładniej - gdy $x$ dąży do $\pm\infty$). W praktyce, gdy mamy do czynienia z funkcją $\frac{ax+b}{cx+d}$, to dla $x$ *bliskich nieskończoności* stałe $b$ i $d$ są względem $x$ tak małe, że w praktyce zostajemy z ułamkiem $\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$

# Asymptoty

Asymptota pozioma to pozioma prosta, do które nasza funkcja się zbliża, gdy $x$ jest bardzo duży na plusie lub minusie (a dokładniej - gdy $x$ dąży do $\pm\infty$). W praktyce, gdy mamy do czynienia z funkcją $\frac{ax+b}{cx+d}$, to dla $x$ *bliskich nieskończoności* stałe $b$ i $d$ są względem $x$ tak małe, że w praktyce zostajemy z ułamkiem $\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$

Te rozważania nie są precyzyjne matematycznie. Lepiej je zrozumiecie przy okazji analizy matematycznej.

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład.

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$.

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$. Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$. Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymtopta,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymtopta, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymtopta, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0, wzór $x = -1$,

# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$. Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymtopta, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0, wzór $x = -1$,
- pozioma asymptota,

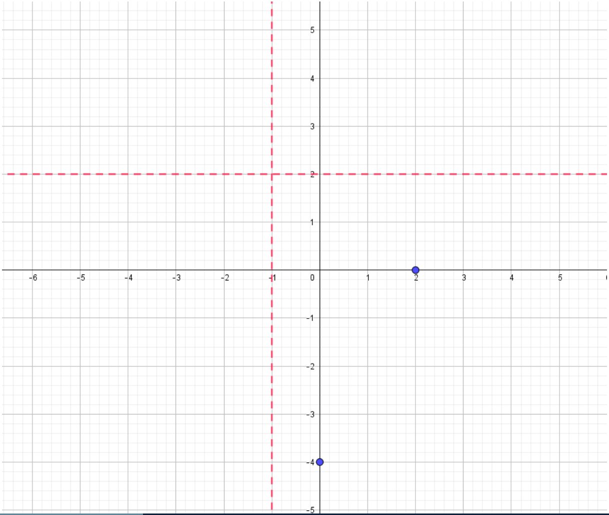
# Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, pod $x$ podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią $OX$, pod $y$ podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymtopta, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0, wzór $x = -1$,
- pozioma asymptota, dla dużych $x$ mamy $y = \frac{2x-4}{x+1} \approx \frac{2x}{x} = 2$, wzór $y = 2$.

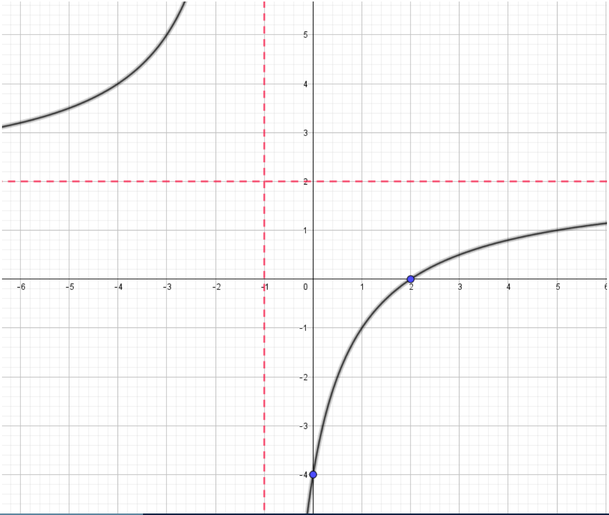
# Przykład 1

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



# Przykład 1

Rysujemy hiperbolę:



# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$,

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią $OX$,

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 3$,

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 3$,
- pionowa asymtopta,

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 3$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -2$,

# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 3$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -2$,
- pozioma asymptota,

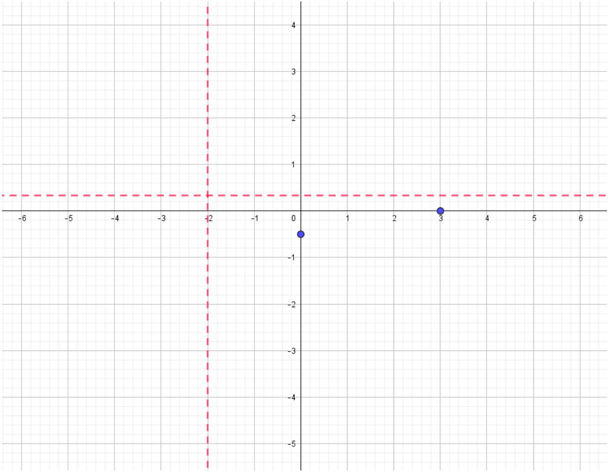
# Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{x-3}{3x+6}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 3$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -2$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{1}{3}$.

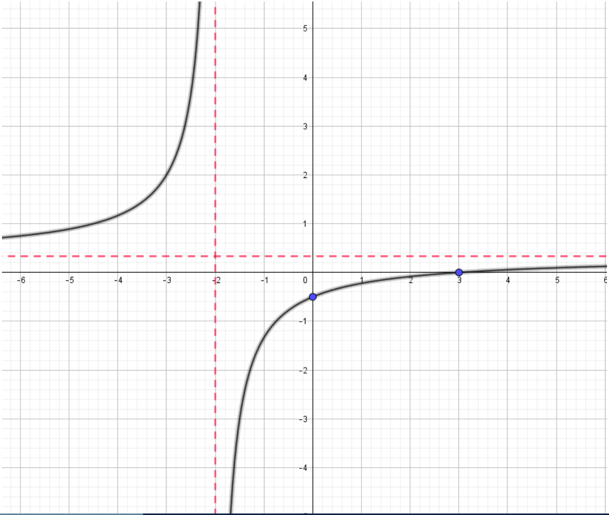
# Przykład 2

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



# Przykład 2

Rysujemy hiperbolę:



# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$,

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią $OX$,

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 2$,

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 2$,
- pionowa asymtopta,

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 2$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -3$,

# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 2$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -3$,
- pozioma asymptota,

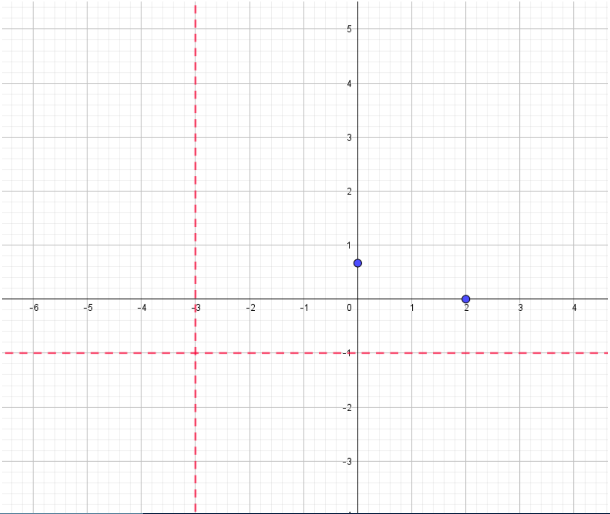
# Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią $OX$, $x = 2$,
- pionowa asymtopta, wzór $x = -3$,
- pozioma asymptota, wzór $y = -1$.

# Przykład 3

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$,

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,
- przecięcie z osią $OX$,

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,
- przecięcie z osią $OX$, nie ma,

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,
- przecięcie z osią $OX$, nie ma,
- pionowa asymtopta,

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,
- przecięcie z osią $OX$, nie ma,
- pionowa asymtopta, wzór $x = 1$,

# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,
- przecięcie z osią $OX$, nie ma,
- pionowa asymtopta, wzór $x = 1$,
- pozioma asymptota,

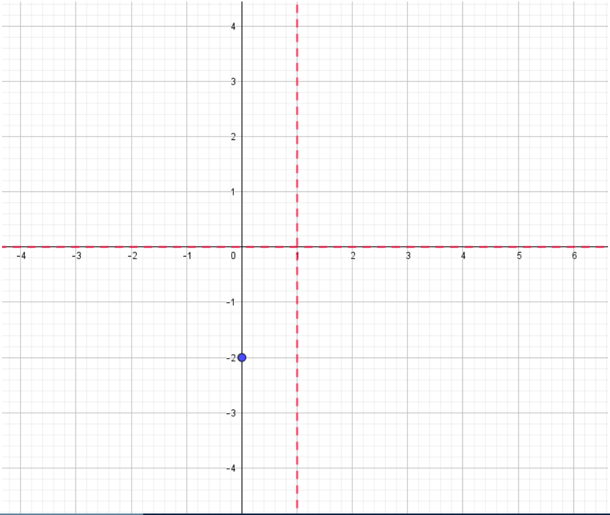
# Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.
Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią $OY$, $y = -1$,
- przecięcie z osią $OX$, nie ma,
- pionowa asymtopta, wzór $x = 1$,
- pozioma asymptota, wzór $y = 0$.

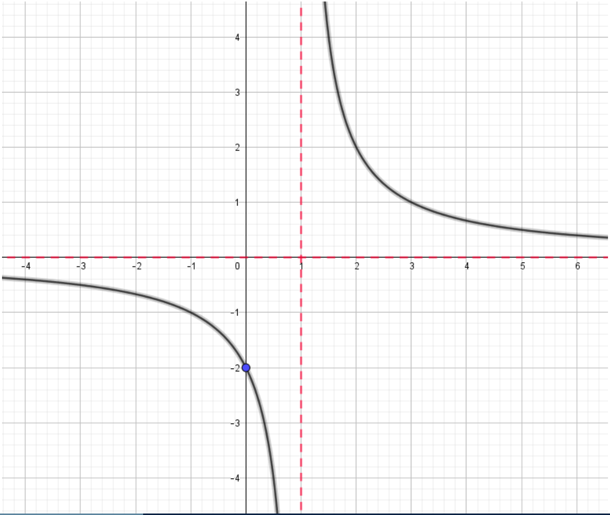
# Przykład 4

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



# Przykład 4

Rysujemy hiperbolę:



W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.