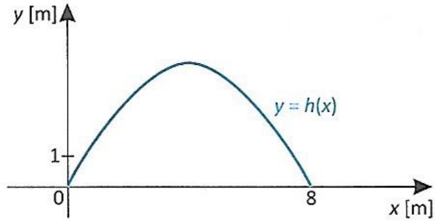
# Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

**2.85.** Tor lotu piłeczki, przedstawiony na rysunku obok, opisuje wzór: $h(x) = -0{,}25x^2 + 2x$, gdzie $x \in (0; 8)$.
Na jaką maksymalną wysokość wzniosła się piłeczka?




**2.86.** Funkcja $f(x) = \frac{-x^2 + 6x + 21}{2}$ opisuje wydajność pracy robotnika w zależności od czasu pracy $x$, w ciągu 8-godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie $7^{00}$. O której godzinie jego wydajność jest największa?

**2.87.** Pewne ciało w czasie $t$ [s] przebyło drogę $S$ [m], którą opisuje wzór $S(t) = t^2 + 5t + 8$, gdzie $t \in \langle 1; 5 \rangle$. Oblicz:
a) długość drogi przebytej przez to ciało w ciągu czterech sekund
b) średnią prędkość ciała.

**2.88.** Rzucono kamień z prędkością początkową 10 m/s pionowo do góry. Wysokość $S$ [m], jaką osiągnie kamień po $t$ sekundach, określona jest w przybliżeniu funkcją $S(t) = 10t - 5t^2$. Jaką maksymalną wysokość osiągnie ten kamień?

**2.89.** Zależność mocy $P$ baterii samochodowej, od natężenia prądu I określa wzór $P(I) = V \cdot I - I^2 \cdot r$, gdzie $V$ – napięcie, zaś $r$ – opór wewnętrzny baterii. Jakie powinno być natężenie prądu, aby moc baterii była maksymalna?

**2.90.** Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch liczb, których suma kwadratów jest najmniejsza.

**2.91.** Liczbę 30 przedstaw w postaci różnicy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

**2.92.** Liczbę 18 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.

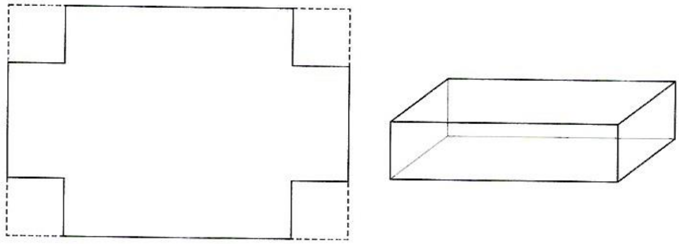
**2.93.** Większa część uczniów klasy liczącej 31 osób zachorowała na grypę. Zdrowi uczniowie postanowili wysłać chorym kolegom kartki z pozdrowieniami. Wiedząc, że każdy zdrowy uczeń wysłał do każdego chorego kolegi kartkę oraz, że liczba wysłanych kartek była największa z możliwych, oblicz ilu uczniów zachorowało na grypę.

**2.94.** Krótszy bok prostokąta o wymiarach 5 cm × 8 cm zwiększamy o $x$ cm, a dłuższy bok zmniejszamy o $x$ cm.

a) Wyznacz wzór funkcji opisującej pole nowego prostokąta w zależności od długości $x$; podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej długości $x$ pole otrzymanego prostokąta jest największe? Oblicz to pole.

**2.95.** Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 20 cm × 30 cm wycięto w rogach kwadraty o boku długości $x$ cm. Następnie po zgięciu powstałych brzegów zbudowano prostopadłościenne (otwarte) pudełko, jak na rysunku poniżej.



a) Wyznacz wzór funkcji opisującej pole powierzchni bocznej tego pudełka w zależności od długości boku wyciętego kwadratu; podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej długości $x$ pole powierzchni bocznej pudełka jest największe z możliwych? Wyznacz to pole.

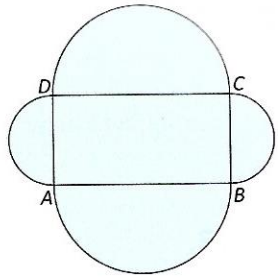
**2.96.** Suma długości podstawy trójkąta i wysokości opuszczonej na tę podstawę wynosi 30 cm. Wyznacz długość tej podstawy i wysokość tak, aby pole trójkąta było największe.

**2.97.** Właściciel gospodarstwa agroturystycznego chce wygrodzić w ogrodzie prostokątny plac zabaw dla dzieci. Dysponuje płotem długości 84 m, a powierzchnia placu ma być możliwie największa. Wyznacz wymiary tego placu zabaw i oblicz jego powierzchnię (w arach).

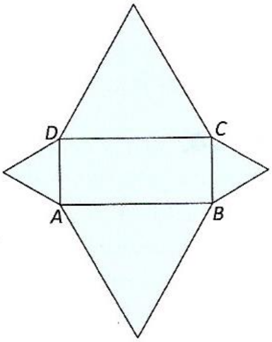
**2.98.** Strona książki ma obwód 68 cm. Oblicz, jakie wymiary powinna mieć strona tej książki, aby zapewnić maksymalną powierzchnię druku, jeśli zakłada się, że marginesy boczne i dolny będą jednocentymetrowe, zaś margines górny – dwucentymetrowy.

**2.99.** Gospodarz chce siatką długości 12 m wygrodzić na podwórku prostokątny wybieg dla psa przylegający jednym bokiem do budynku. Jakie wymiary powinien mieć ten wybieg, aby jego pole powierzchni było największe? Oblicz powierzchnię tego największego wybiegu.

**2.105.** Na bokach prostokąta $ABCD$ o obwodzie 24 cm opisano półkola (jak na rysunku obok). Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych półkoli było najmniejsze?




**2.106.** Na bokach prostokąta $ABCD$ o obwodzie 100 cm dorysowano trójkąty równoboczne (jak na rysunku). Jakie powinny być długości boków prostokąta, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych trójkątów było najmniejsze?




**2.107.** Drut długości 100 cm podzielono na dwie części: z jednej zbudowano kwadratową ramkę, a z drugiej okrąg. Jaka powinna być długość każdej części, aby suma pól figur ograniczonych drutem była najmniejsza?

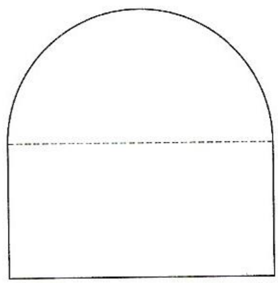
**2.108.** Drut długości 2 m podzielono na dwie części: z jednej zrobiono kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, w której jeden bok prostokąta ma długość 3 razy większą od długości drugiego boku. Jak należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

**2.109.** Drut o długości 8 m podzielono na dwie części: z jednej zrobiono kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę w kształcie trójkąta równobocznego. Jak należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i trójkąta była najmniejsza?

**2.110.** Drut długości 2 m ma być podzielony na dwie części: z jednej powstanie ramka kwadratowa, a z drugiej ramka prostokątna o stosunku boków 2 : 3. Na części jakiej długości należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

**2.111.** Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem (jak na rysunku obok). Obwód okna ma 4 m. Oznacz długość podstawy prostokąta przez $x$. Następnie:

a) Napisz wzór funkcji pola $P$ powierzchni okna, w zależności od $x$.
b) Określ dziedzinę funkcji $P$.
c) Wyznacz długość podstawy prostokąta tak, aby pole powierzchni okna było największe. Uzasadnij odpowiedź.



**2.228.** Liczby $4-2\sqrt{3}$ oraz $4+2\sqrt{3}$ są rozwiązaniami równania $x^2+(p+q)x+p^2-q^2=0$. Oblicz $p$ i $q$.

**2.229.** Liczby $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ oraz $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ są rozwiązaniami równania $x^2-(p+q)x+q^2-8p=0$. Oblicz $p$ i $q$.

## Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

**2.230.** Zbadaj liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru $m$ ($m \in \mathbb{R}$). Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji $y=g(m)$, która każdej wartości parametru $m$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania:

a) $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$
b) $(m-3)x^2+(m-2)x+1=0$
c) $(m-1)x^2-(m+1)x+m+1=0$
d) $(2m-3)x^2+4mx+m-1=0$

**2.231.** Dla jakich wartości parametru $m$ równanie ma dwa różne rozwiązania?

a) $(m-2)x^2+(m+5)x-m-1=0$
b) $(m+2)x^2-2x+m+2=0$

**2.232.** Dla jakich wartości parametru $m$ równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste różnych znaków?

a) $x^2+(2m-3)x+2m+5=0$
b) $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$
c) $x^2-2(m-1)x+2m+1=0$
d) $2x^2-3(m-1)x+1-m^2=0$

**2.233.** Dla jakich wartości parametru $m$ równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie?

a) $x^2-mx+\frac{1}{4}m(m-1)=0$
b) $x^2-2mx-m^2+4=0$
c) $x^2+3mx+2m^2+2=0$
d) $x^2-2(m-2)x+m^2-2m-3=0$

**2.234.** Dla jakich wartości parametru $m$ równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste jednakowych znaków?

a) $x^2+2(m+4)x+m^2-2m=0$
b) $x^2-2(m-1)x+m^2-5=0$
c) $4x^2+(4m-12)x+m(m+2)=0$
d) $2x^2+(m-9)x+m^2+3m+4=0$

**2.235.** Dla jakich wartości parametru $m$ równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste ujemne?

a) $x^2+mx-m+3=0$
b) $x^2-2(m+3)x+m^2-1=0$
c) $x^2-2mx+m^2-4=0$
d) $x^2+5mx+4m^2-3m=0$

f) najmniejsza wartość: $-6\frac{1}{4}$, największa wartość: $-5\frac{3}{4}$

2.80. a) najmniejsza wartość: $4\frac{1}{4}$, największa wartość: 5

b) najmniejsza wartość: $-\frac{1}{3}$, największa wartość: $1\frac{2}{3}$

c) najmniejsza wartość: $10\frac{4}{5}$, największa wartość: $11\frac{9}{20}$

d) najmniejsza wartość: $-10$, największa wartość: $-10\frac{3}{10}$

2.81. a) najmniejsza wartość: $-24\sqrt{3}$, największa wartość: $-9\sqrt{3}$

b) najmniejsza wartość: $3\sqrt{2}$, największa wartość: $4\sqrt{2}$

c) najmniejsza wartość: $-4{,}8$, największa wartość: $-4{,}5$

d) najmniejsza wartość: $-4{,}8\sqrt{2}+4$, największa wartość: $4{,}8\sqrt{2}+4$

2.82. a) najmniejsza wartość: 2, największa wartość: 6

b) najmniejsza wartość: 2, największa wartość: 4

c) najmniejsza wartość: $-6$, największa wartość: $-2$

d) najmniejsza wartość: $-1\frac{1}{8}$, największa wartość: $6+5\sqrt{2}$

2.83. a) wartość największa 108, dla argumentu $-2$

c) wartość największa: 105, wartość najmniejsza: 96

2.84. a) wartość największa, dla argumentu 2

b) wartość największa: 3, wartość najmniejsza: 0

## Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

2.85. 4 m

2.86. o $10^{00}$

2.82. a) 44 m b) 11 m/s

2.87. 50; 50

2.88. 5 m

2.89. $l=\frac{V}{2r}$

2.90. 50; 50

2.91. 15; $(-15)$

2.92. 9; 9

2.93. 16 uczniów

2.94. a) $P(x)=-x^2+3x+40$; $D_P=(0;8)$ b) $x=1{,}5$ cm, $P=42{,}25\text{ cm}^2$

2.95. a) $P(x)=-8x^2+100x$; $D_P=(0;10)$ b) $x=6{,}25$ cm, $P=312{,}5\text{ cm}^2$

2.96. 15 cm, 15 cm

2.97. wymiary placu: 21 m × 21 m; $P=4{,}41$ a

2.98. 17,5 cm × 16,5 cm

2.99. 3 m na 6 m; $P = 18\ \text{m}^2$

2.100. 20 cm × 15 cm

2.101. 1,5 m × 2 m

2.102. a) $P(x) = 2x^2 - 8x + 16$, $D_P = (0; 4)$ b) $K, L, M, n$ – środki boków kwadratu $ABCD$

2.103. a) $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 15\sqrt{3}x + 100\sqrt{3}$, $x \in (0; 20)$ b) $M, N, P$ – środki boków trójkąta $ABC$

2.104. $N, M$ – środki przyprostokątnych

2.105. 6 cm, 6 cm

2.106. 25 cm, 25 cm

2.107. $\frac{400}{\pi + 4}$ cm, $\frac{100\pi}{\pi + 4}$ cm

2.108. $\frac{6}{7}$ m, $1\frac{1}{7}$ m

2.109. $\frac{24(9 - 4\sqrt{3})}{11}$ m, $\frac{32(3\sqrt{3} - 4)}{11}$ m

2.110. $\frac{50}{49}$ m; $\frac{48}{49}$ m

2.111. a) $P(x) = -\left(\frac{\pi + 4}{8}\right)x^2 + 2x$ b) $x \in \left(0, \frac{8}{\pi + 2}\right)$ c) $\frac{8}{\pi + 4}$ m

2.112. $\frac{4(2\sqrt{2} - 1)}{7}$ m

2.113. 170 zł

2.114. wysokość czynszu: 1320 zł, miesięczny przychód: 217 800 zł

2.115. a) 55 b) 52

2.116. odległość między samochodami będzie najmniejsza po upływie $\frac{3}{52}$ h i będzie wynosić ok. 2,8 km

*wskazówka*: oznacz przez $t$ [h] – czas jazdy obu samochodów, od momentu, w którym samochód jadący na wschód mija punkt $P$. Wówczas odległość między samochodami podaj wzór: $d(t) = \sqrt{(5 - 60t)^2 + (40t)^2}$, $t \geq 0$. Funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą wówczas, gdy wyrażenie podpierwiastkowe przyjmuje wartość najmniejszą.

2.117. $\left(6 + 3\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)$ cm

2.118. trójkąt równoboczny o boku 2 cm; pole trójkąta $\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

## Równania kwadratowe

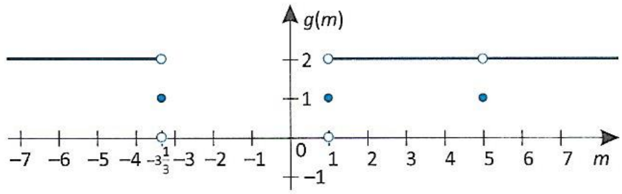
2.119. a) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-\frac{5}{9}, \frac{5}{9}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

e) równanie sprzeczne f) $x \in \left\{-2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right\}$

2.120. a) $x \in \left\{0, 2\frac{1}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-2\frac{1}{4}, 0\right\}$ c) $x \in \{0, 4\}$ d) $x \in \left\{-\frac{5}{6}, 0\right\}$

## Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

2.230. a) $g(m)=\begin{cases} 2 \text{ dla } m\in\left(-\infty,-3\frac{1}{3}\right)\cup(1,5)\cup(5,+\infty) \\ 1 \text{ dla } m\in\left\{-3\frac{1}{3},1,5\right\} \\ 0 \text{ dla } m\in\left(-3\frac{1}{3},1\right) \end{cases}$




b) $g(m)=\begin{cases} 2 \text{ dla } m\in\boldsymbol{R}-\{3,4\} \\ 1 \text{ dla } m\in\{3,4\} \end{cases}$

c) $g(m)=\begin{cases} 2 \text{ dla } m\in(-1,1)\cup\left(1,1\frac{2}{3}\right) \\ 1 \text{ dla } m\in\left\{-1,1,1\frac{2}{3}\right\} \\ 0 \text{ dla } m\in(-\infty,-1)\cup\left(1\frac{2}{3},+\infty\right) \end{cases}$

d) $g(m)=\begin{cases} 2 \text{ dla } m\in(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)\cup\left(1\frac{1}{2},+\infty\right) \\ 1 \text{ dla } m\in\left\{-3,\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right\} \\ 0 \text{ dla } m\in\left(-3,\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

2.231. a) $m\in\boldsymbol{R}-\{2\}$  b) $m\in(-3,-2)\cup(-2,-1)$

2.232. a) $m\in\left(-\infty,-2\frac{1}{2}\right)$  b) $m\in\left(-\infty,\frac{5}{9}\right)$  c) $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$  d) $m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2.233. a) $m\in(1,+\infty)$  b) $m\in(\sqrt{2},2)$  c) $m\in(-\infty,-2\sqrt{2})$  d) $m\in\left(3,3\frac{1}{2}\right)$

2.234. a) $m\in\left(-1\frac{3}{5},0\right)\cup(2,+\infty)$  b) $m\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},3)$

c) $m\in(-\infty,-2)\cup\left(0,1\frac{1}{8}\right)$  d) $m\in(-7,1)$

2.235. a) $m\in(2,3)$  b) nie istnieje taka wartość parametru $m$  c) $m\in(-\infty,-2)$

d) $m\in\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$